Prof. Dr. Stefan Wewers
Institut für Reine Mathematik

Seminar im WS 15/16

Algebraische Topologie

Programm

Stand: 15.7.2015

1 Vorträge

Dies ist eine vorläufige Vortragsliste. Je nach tatsächlicher Teilnehmerzahl wird sie noch modifiziert werden müssen.

Den ersten Vortrag würde ich selber halten. In den Vorträgen 2-7 wird die singuläre Homologie eingeführt, werden die wichtigsten Eigenschaften bewiesen und einige signifikante Beispiele berechnet. In den Vorträgen 8-11 geht es um die de Rham-Kohomologie und den Zusammenhang mit der singulären (Ko)Homologie.

Vortrag 1 (Einleitung und Überblick) Ich werde versuchen, einige Grundideen der algebraischen Topologie zu erklären und einen Überblick über das Seminarprogramm zu geben.

Vortrag 2 (Homotopie und Fundamentalgruppen) In diesem Vortrag soll der Begriff der *Homotopie* ganz allgemein eingeführt werden, und die Theorie der Fundamentalgruppe in groben Zügen entwickelt werden, sozuagen als ersten Beispiel für eine Zuordnung, die einem topologischen Raum eine Gruppe zuordnet. Siehe [2], Kapitel I.

Vortrag 3 (Definition der singulären Homologiegruppen) Hier geht es um die Definition der *singulären Homologiegruppen* $H_q(X)$ eines topologischen Raumes X. Dazu müssen zuerst affine und singuläre Simplizes eingefürt werden. Die Sätze II.2.2 und II.2.3 aus [2] sollten nach Möglichkeit bewiesen werden. Siehe [2], Kapitel II, §1-2.

Vortrag 4 (Homotopieinvarianz der singulären Homotopie) Ziel ist der Beweis von Satz II.3.1 aus [2], der besagt, dass zwei homotope Abbildungen dieselben Homomorphismen von Homologiegruppen induzieren.

Wenn Zeit bleibt, können die Korollare II.3.6 und II.3.7 erklärt werden. Siehe [2], Kapitel II, §3.

Vortrag 5 (Die lange exakte Homologiesequenz) Definiere zuerst die relative Homologiegruppen $H_q(X,A)$ eines Paares (X,A). Hauptziel des Vortrags ist die Konstruktion der langen exakten Homologiesequenz

$$\cdots \to H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X,A) \to H_{q-1}(A) \to \cdots,$$

siehe [2], Kapitel II, §5, p. 39. Die Konstruktion dieser Sequenz benutzt eine ganz allgemeine Konstruktion (Satz II. 5.1), die zumindest skizziert werden soll. Als Anwendung soll der Satz II.5.3 und das folgende Beispiel diskutiert werden.

Siehe [2], Kapitel II, §4-5.

Vortrag 6 (Der Ausschneidungssatz) Dieser Vortrag ist recht umfangreich und könnte auf zwei Vorträge ausgedehnt werden.

Im ersten Teil ginge es darum, den Ausschneidungssatz ([2], Theorem II.6.1) zu formulieren und anzuwenden. Die wichtigste Anwendung wäre die Berechnung der Homologiegruppen der Sphären (Satz II.6.4), der Brouwersche Fixpunktsatz, und die Definition des Grades einer Abbildung $f : S^n \to S^n$.

Im zweiten Teil ginge es um den Beweis des Ausschneidungssatzes, der vermutlich nur skizziert werden kann. Die zentralen Ideen sind die baryzentrische Unterteilung von Simplizes und die Konstruktion einer gewissen Kettenabbildung. Einige technische Resultate wie zum Beispiel das *Fünferlemma* können ohne Beweis benutzt werden.

Siehe [2], Kapitel II, §6.

Vortrag 7 (Die Mayer-Vietoris-Sequenz) Die Mayer-Vietoris-Sequenz ist eine lange exakte Homologiesequenz, ähnlich wie die Homologiesequenz aus Vortrag 5. Ihre Konstruktion kann also relativ schnell angegeben werden. Sie ist besonders nützlich für die Berechnung der Homologie von Räumen, die durch das Zusammenkleben von einfacheren Räumen beschrieben werden können. Anwendungen sind zum Beispiel die Berechnung der Homologiegruppen der reellen und komplexen projektiven Räume (Satz II.8.7 und II.8.8).

Siehe [2], Kapitel II, §7-9.

Vortrag 8 (Glatte Mannigfaltigkeiten) Hier geht es darum, in Kürze den Begriff der glatten Mannigfaltigkeit zu definieren. Wichtig sind auch Tangentialräume, Vektorfelder, und Differenzialformen. Eine möglich Quelle ist [1], Kapitel II, §2-5, Kapitel V, §1-2, aber vermutlich gibt es bessere Quellen. Der Vortrag sollte eng mit Vortrag 9 abgestimmt werden.

Vortrag 9 (Der Satz von Stokes) Hier geht es darum, die Integration über n-Formen zu definieren und den Satz von Stokes zu beweisen ([1], Satz V.4.1). Siehe [1], Kapitel V, §1-4.

Je nach Vorkenntnis der Teilnehmer könnten Vortrag 8 und 9 auch zusammengefasst werden.

Vortrag 10 (Der Satz von de Rham, I) In diesem Vortrag geht es darum, die deRham-Kohomologiegruppen und die singuläre Kohomologie zu definieren und den Satz von de Rham ([1], Satz V.9.1) zu formulieren. Siehe [1], Kapitel V, §2,5,9.

Vortrag 11 (Der Satz von De Rham, II) Hier geht es um den Beweis des Satzes von de Rham, siehe [1], Kapitel V, §9-10.

References

[1] G.E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer-Verlag, 1993.

[2] W. Ebeling and K. Hulek. Algebraische Topologie. Vorlesungsskript, Universität Hannover.