Mathematik des Fußballs

Artur Bille, Evgeny Spodarev - Institut für Stochastik - Universität Ulm

Bald ist es wieder soweit. In wenigen Wochen beginnt in Russland die Fußball-WM 2018, und gekickt wird dieses Mal ein Fußball namens *Telstar 18*. Dieser ist eine moderne Intepretation des klassischen *Telstars*, mit dem sich Deutschland 1974 im eigenen Land zum WM-Titel schoss.

Etwa 20 Jahre nach der WM in Deutschland bekamen Robert F. Curl jr., Sir Harold W. Kroto und Richard E. Smalley den Chemie-Nobelpreis für die Entdeckung einer neuen Kohlenstoffmodifikation, des Fullerens, auch *Fußballmolekül* genannt. Dieser Name ist der Tatsache geschuldet, dass das erste und bekannteste Fulleren, C_{60} - ein Molekül bestehend aus 60 Kohlenstoffatomen - aufgebaut ist wie der Telstar - nur 314 Millionen mal kleiner. Seine Oberfläche besteht aus 20 Sechsecken und zwölf zu aneinander inzidenten Fünfecken. Diese gemeinsame Form weist viele Symmetrien auf.

Abbildung 1: Von links nach rechts: Telstar 18, Telstar und C_{60}–Fulleren[1]

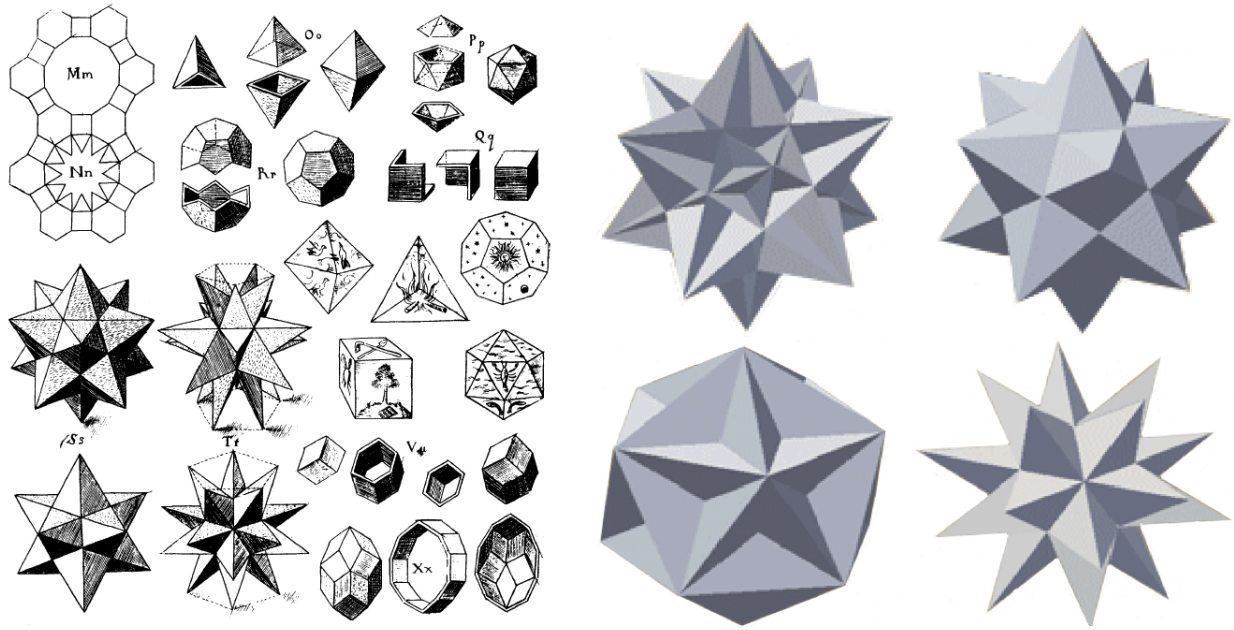
Und der Mensch liebt seit jeher Symmetrien. Bereits etwa 400 v. Chr. dachte der griechische Philosoph und Mathematiker Platon über geometrische Körper mit größtmöglichen Symmetrien nach. Eine ganze Reihe solcher Formen, die *platonischen Körper*, beschrieb er in seinem Werk *Timaios*. Dabei handelt es sich um konvexe Polyeder [4], deren Oberflächen aus deckungsgleichen konvexen gleichseitigen Vielecken bestehen. Eine Menge von Punkten nennt man *konvex*, falls jede gerade Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten dieser Menge innerhalb der Menge liegt. Solche konvexe Körper nennt man *regulär* [2]. Man kann zwar beliebig viele verschiedene derartige Vielecke konstruieren, doch gibt es nur fünf geschlossene konvexe Körper, die ausschließlich aus solchen als Seitenflächen bestehen. Dies sind: *Tetraeder* (vier Dreiecke), *Hexaeder* (sechs Quadrate), *Oktaeder* (acht Dreiecke), *Pentagondodekaeder* (zwölf Fünfecke) und *Ikosaeder* (20 Dreiecke).

Abbildung 2: Fünf platonische Körper: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Hexaeder und Pentagondodekaeder[2]

[1] SoccerPro.com, welcome2018.com, ethw.org (2018)

[2] Wikipedia.org (2018)

Fast 2000 Jahre später entdeckte der deutsche Mathematiker und Astronom Johannes Kepler weitere reguläre Polyeder, die sogenannten *Sternkörper*. Der einzige, aber entscheidende Unterschied ist, dass diese „neuen" Polyeder nicht *konvex* sind. Zwei weitere Sternkörper beschrieb der französische Mathematiker Louis Poinsot etwa 200 Jahre später in seinem Werk *Mémoire sur les polygones et les polyèdres* [8].



(a) Verschiedene Körper, u.a. platonische Körper und Sternkörper

(b) Sternkörper: Großes Ikosaeder, Dodekaederstern, großes Dodekaeder und Ikosaederstern

Abbildung 3: (a) Originalillustration aus [5] und (b) vier Sternkörper[3]

Interessant ist, dass man erst in den letzten 30 Jahren entdeckt hat, dass einer der platonischen Körper das kleinste Fullerenmolekül beschreibt. Möchte man Fullerene mit mathematischen Modellen beschreiben, so handelt es dabei um einen konvexen Polyeder, deren Oberfläche aus regelmäßigen Fünf- und Sechsecken besteht. Man kann mit Eulers Polyedersatz folgern, dass ein Fulleren immer aus genau zwölf Fünfecken besteht. Die restlichen Flächen sind Sechsecke. Ein Fulleren hat immer eine gerade Anzahl an Ecken, aber mindestens 20. Einzig das mit 22 Ecken existiert nicht [3]. Das kleinste Fulleren ist das mit 20 Ecken und somit zwölf Außenflächen. Dies ist der Pentagondodekaeder, der aus genau zwölf regelmäßigen Fünfecken besteht. Also hat schon Platon vor etwa 2500 Jahren, ohne es zu wissen, die Form des kleinsten Fullerens beschrieben.

Fullerene sind jedoch nicht nur für Mathematiker interessant. Auch aus der Sicht der Naturwissenschaften wurde an ihnen in den letzten 30 Jahren sehr intensiv geforscht. So untersuchen Physiker und Chemiker sie auf ihre Eigenschaften wie Wärme- und Stromleitfähigkeit oder Stabilität unter verschiedenen äußeren Bedingungen. Auch versuchen sie immer wieder, mit Hilfe neuer Versuchsanordnungen Fullerene mit unterschiedlich vielen Atomen herzustellen. Aufgrund vieler Beobachtungen und Messungen haben Astronomen schon lange vermutet, dass große Mengen von Fullerenen im Weltall existieren. Vor einigen Jahren wurde diese Vermutung bestätigt [6].

Aber auch außerhalb der Naturwissenschaften befasst man sich mit der Form und den Eigenschaften der Fullerene. Benannt sind Fullerene nach dem amerikanischen Architekten Richard Buckminster Fuller, der bereits im Jahr 1967 eine geodätische Kuppel in Montreal, die in ihrer Architektur der der Fullerenen stark ähnelt, konstruierte. Auch wird das bisher am besten erforschte Fulleren, das in Abbildung 1 gezeigt ist, *Buckyball* oder *Buckminster-Fulleren* genannt.

[3]tetraktys.de (2018)

Abbildung 4: Biosphère Montreal entworfen von Richard Buckminster Fuller im Jahr 1967[4]

Doch diese fußballgleiche Form ist nicht die einzige, die C_{60} annehmen kann. Mit Hilfe von leistungsstarken Computern hat man schon früh herausgefunden, dass 1812 verschiedene Isomere für C_{60} möglich sind. Isomere sind Moleküle, die in Qualität und Quantität ihrer Atome gleich sind. Doch die Anordnung der Atome unterscheidet sich. Auf Fullerene über tragen sind Isomere zwei Fullerene mit der selben Anzahl an Ecken und damit auch Fünf- und Sechsecken. Jedoch ist die Verteilung der zwölf Fünfecken auf der Oberfläche unterschiedlich. Im Buckminster-Fulleren sind alle Fünfecke von den anderen Fünfecken isoliert. Man nennt ein solches Isomer *IPR*–Isomer (= Isolated Pentagon Rule). Die Anzahl aller Isomere steigt sehr schnell mit der Anzahl der Ecken. Die Anzahl der IPR–Isomere steigt jedoch deutlich langsamer. So hat C_{100} insgesamt etwa 286.000 Isomere, doch nur 450 IPR–Isomere. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, in dieser großen Menge eine Ordnung zu schaffen und interessante Klassen von Isomeren zu finden. An dieser Fragestellung arbeiten derzeit Prof. Spodarev und Artur Bille von der Universität Ulm in enger Zusammenarbeit mit Prof. Buchstaber von der Lomonossov-Universität in Moskau zusammen [1].

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Form der Fullerene bereits seit langer Zeit bekannt war und auch genutzt wurde. Doch erst seit der Entdeckung der Fullerene im Labor wird an ihnen sehr intensiv und interdisziplinär geforscht. Fullerene stellen ein noch sehr junges Forschungsgebiet dar und viele Fragen sind noch unbeantwortet.

Das gesamte Institut für Stochastik der Universität Ulm wünscht allen eine schöne WM.

[4]Wikipedia.org (2018)

Literatur

[1] A. Bille, V. Buchstaber, M. Schandar, E. Spodarev, *Spectral clustering of combinatorial fullerene isomers based on its facet eigenstructure*, Preprint, 2018.

[2] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, dritte Edition, Dover Publications, 1973.

[3] P.W Fowler, D.E. Manolopoulos, *An Atlas of Fullerenes*, Clarendon Press Oxford, 1995.

[4] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, zweite Edition, Springer, 2003 .

[5] J. Kepler, übersetzt von E. J. Aiton, A. M. Duncan, J. V. Field, *The Harmony of the World*, American Philosophical Society, 1997 (Original 1619).

[6] C. Leidlmair, P. Bartl, H. Schöbel, S. Denifl, M. Probst, P. Scheier, O. Echt, *On the possible presence of weakly bound Fullerene-H_2 complexes in the interstellar medium*, The Astrophysical Journal Letters, 2011.

[7] Platon, übersetzt von F. Susemihl, *Timaios*, 1856 (Original etwa 400 v. Chr.)

[8] L. Poinsot, übersetzt von R. Haussner, *Abhandlungen über die regelmässigen Sternkörper*, W. Engelmann, 1906 (Original 1809).