ulm university universität
uulm

Prof. Dr. Evgeny Spodarev

Gipfel und Nordwände der Schulmathematik oder Aufstieg bis zur Mathe-Olympiade

Vorlesungsskript

2021

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort **1**

2 (Un)gleichungen **4**

2.1 Rationale (Un)gleichungen 4

2.1.1 Allgemeine Form 4

2.1.2 Die Intervallmethode 4

2.1.3 Vorzeichenregel 5

2.2 (Un)gleichungen mit Beträgen 7

2.3 (Un)gleichungen mit Wurzeln 9

2.4 Exponentielle (Un)gleichungen 11

2.5 Logarithmische (Un)gleichungen 13

2.6 Formelsammlung 16

2.6.1 Umgang mit Beträgen 16

2.6.2 (Un)gleichungen mit Wurzeln 16

2.6.3 Umgang mit Potenzen 17

2.6.4 (Un)gleichungen mit Potenzen 17

2.6.5 Umgang mit Logarithmen 18

2.6.6 (Un)gleichungen mit Logarithmen 19

2.6.7 Ableitungen 20

2.7 Übungsaufgaben 21

3 Trigonometrie **26**

3.1 Die Hilfsargumenten-Methode 26

3.2 Zurückführen auf ein Polynom von einer trigonometrischen Funktion 27

3.3 Polynomdivision 30

3.4 Ausnutzung von Ungleichungen und Monotonie 32

3.5 Summation von trigonometrischen Funktionen mit Hilfe von erzeugenden Funktionen 33

3.6 Umwandlung von Summen und Produkten 34
3.7 Lösen von Ungleichungen 35
3.8 Lösung von Gleichungssystemen 40
3.9 Formelsammlung 42
3.9.1 Reduktion auf Grundgleichungen 42
3.9.2 Hilfsargumenten-Methode 44
3.10 Übungsaufgaben 45
3.10.1 Gleichungen 45
3.10.2 Ungleichungen 46
3.10.3 Weitere Gleichungen 47
3.10.4 Gleichungssysteme 48

4 Gleichungssysteme **50**
4.1 Lineare Gleichungssysteme 50
4.2 Das Gauß-Verfahren 51
4.3 Die Determinante und Cramersche Regel 53
4.3.1 Die Leibnitz-Formel 54
4.3.2 Berechnung der Determinante 54
4.3.3 Die Cramersche Regel 55
4.4 Methode der variablen Koeffizienten 58
4.5 Nicht-lineare Gleichungssysteme 61
4.6 Übungsaufgaben 65
4.6.1 Aufgaben für das Gauß-Verfahren und die Cramersche Regel 65
4.6.2 Variable Koeffizienten und die Cramersche Regel 66
4.6.3 Nichtlineare Gleichungssysteme 68

5 Analytische Geometrie **71**
5.1 Probleme auf der Ebene 71
5.2 Probleme im dreidimensionalen Raum 75
5.3 Formelsammlung 84
5.4 Übungsaufgaben 88
5.4.1 Probleme auf der Ebene 88
5.4.2 Probleme im dreidimensionalen Raum 90

6 Olympiade-Probleme **95**
6.1 Zahlenprobleme 95

6.2 Polynome 98
6.3 Geometrie 99
6.4 Analytische Aufgaben 101
6.5 Formel- und Faktensammlung 105
6.6 Übungsaufgaben 107

7 Lösungen **113**
7.1 (Un)gleichungen 113
7.2 Trigonometrie 115
7.3 Gleichungssysteme 117
7.4 Analytische Geometrie 118
7.5 Olympiade-Probleme 120

Literaturverzeichnis **121**

1 Vorwort

Die Qualität des Mathematik-Unterrichts an deutschen Schulen und Gymnasien hat in den letzten 30 Jahren kontinuierlich abgenommen. Dies hat eine Reihe demographischer sowie bildungspolitischer Gründe, zum Einen. Zum Anderen reflektiert es den allgemeinen Trend der rapiden Verschlechterung der Schulausbildung in der ganzen Welt, die viele Länder derzeit erleben. Aus dem Wortschatz und den Fachbüchern der Schüler verschwinden solche Begriffe wie „Satz“, „Lemma“, „Beweis“, die bestenfalls durch „Kompetenz“, „Begründung“ und „Erklärung“ ersetzt werden. Schwach ausgebildete Schüler absolvieren anschließend an den Universitäten das Lehramtsstudium und werden nur mäßig gute Mathematiklehrer, die komplexe mathematische Sachverhalte kaum weiter vermitteln können... So schließt sich der *Circulus Viciosus*. Die Mathematik gilt in der Schule als eins der unbeliebtesten Fächer, das kaum etwas nützt. Außerdem ist es „streßig“ geworden, zu viele Hausaufgaben zu bekommen, denn das Schulleben soll doch entspannt sein und „Spaß machen“. Dazu wird die Mittelmäßigkeit der Lösungswege, das Nicht-Abweichen vom vorgegebenen Pfad von vielen Lehrern gerade favorisiert! Man orientiert sich oft beim Aufbau des Unterrichts an den schwächeren Schülern der Klasse. Die Wortkombination „Elitebildung“ ist nicht mehr „in“... Man hat einfach verdrängt, dass nicht die breite Masse, sondern gerade die besten Wenigen, die Speerspitze der Gesellschaft, das „Salz der Erde“ den Fortschritt der gesamten Menschheit vorgeben und entscheidend mitgestalten. Wenn dies alles weiterhin ungebremst seinen Lauf nimmt, droht den europäischen Ländern in Kürze ein neues Bildungsmittelalter.

Deshalb ist es von enormer Wichtigkeit, diesem Prozess entgegen zu wirken und sich der Ausbildung der wissenschaftlichen Elite zu verschreiben. Diese Elite beginnt in der Schule, dort müssen wir die Begabtesten abholen. In der Mathematik gibt es bereits Mittel und Wege, die sich dabei bestens bewährt haben. Eins davon sind *Mathematik-Wettbewerbe*, in denen man auf die langjährige Erfahrung der besten mathematischen Schulen der Welt zurück greifen kann. Das vorliegende Vorlesungsskript ist dabei ein Versuch, einen relativ kleinen Teil der Finessen der Schulmathematik in den höheren gymnasialen Jahrgangs-

stufen 11-13 den Schülerinnen und Schülern verständlich und zugänglich zu machen. Es entstand aus einer Vorlesungsreihe, die der Autor am Begabtenseminar für Schüler in der Mathematik an der Universität Ulm (2019-2021) gehalten hatte. Die meisten Inhalte des Skriptes werden an den Gymnasien bestenfalls erwähnt, aber keinesfalls systematisch geübt.

Dabei griff der Autor auf die zum Großteil nicht übersetzten russischsprachigen Quellen zurück, die der renommierten sowjetischen Mathematik-Schule (1960-1990er Jahre) entspringen. Die Tradition der Schulinternate für begabte Schüler im ehemaligen Ostblock geht auf den bekannten russischen Mathematiker A. N. Kolmogorow (1903-1987) zurück. Sie hat eine Reihe exzellenter Wissenschaftler in einigen naturwissenschaftlichen Fächern vorbereitet, die in allen Teilen der modernen Welt arbeiten.

Das Skript beginnt mit dem Umgang mit rationalen Gleichungen, Ungleichungen und Systemen. Es folgen Probleme, die Wurzeln, Beträge, Potenzen, Logarithmen sowie trigonometrische Funktionen enthalten. In Kapitel 4 betrachtet man lineare sowie nicht-lineare Gleichungssysteme mit dazu gehörenden Lösungsmethoden, die teilweise auch deutlich über dem Niveau des Schulprogramms liegen. Es folgt ein Kapitel über die geometrischen Probleme in der Ebene sowie im dreidimensionalen Euklidischen Raum, in denen die lineare Algebra sowie Vektor-Methoden der analytischen Geometrie nützlich sein können. Das wohl spannendste Kapitel behandelt die Mathe-Olympiaden-Probleme (Kapitel 6), das mehrere historisch gestellte Aufgaben mit ungewöhnlichen Lösungsansätzen präsentiert.

Jedes Kapitel hat eine Formel- und Faktensammlung, die der Schüler am Besten auswendig lernen soll. Dieser folgt eine Hausaufgaben-Sammlung, die sich an die im Text des Kapitels erklärten Lösungswege orientiert. Die meisten Aufgaben sind mit Lösungen versehen, die in Kapitel 7 zu finden sind.

Der Autor möchte den Herren Nicolas Kainz und Linus Lach den aufrichtigen Dank für die Mitarbeit bei der Erstellung des Skriptes aussprechen. Herr Lach hat die Formel- sowie Aufgabensammlungen getippt. Herr Kainz übernahm die Vorlesungen und Lösungen sowie die Gestaltung jeglicher Grafiken und Abbildungen in diesem Skript. Das Korrekturlesen sowie die Gestaltung des Layouts wurden ebenso von Herrn Kainz durchgeführt.

Last but not least: Der Autor dankt herzlich seinen ersten Mathematiklehrern Nelli F. Schewtsowa (Gymnasium Nr. 1 in Nowossibirsk) und Wladimir N. Djatlow (Staatliche Universität Nowossibirsk), die ihn in die aufregendste Welt der Mathematik eingeführt

hatten.

Ulm, den 10.01.2021

Prof. Dr. Evgeny Spodarev

2 (Un)gleichungen

In allen Teilgebieten der Mathematik werden eine Reihe verschiedener Gleichungen sowie Ungleichungen benutzt, um Probleme und Sachverhalte beschreiben zu können. Meist soll eine Lösungsmenge als Teilmenge der reellen Zahlen gefunden werden, wobei die (Un)gleichung für eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ genau dann als erfüllt angesehen wird, wenn x innerhalb der Lösungsmenge liegt. Der Ausdruck

$$\mathcal{A} \begin{matrix} < \leq \\ > \geq \end{matrix} \mathcal{B}$$

soll in dieser Vorlesung bedeuten, dass ein beliebiges der vier Symbole $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ zwischen der linken Seite $\mathcal{A}$ und der rechten Seite $\mathcal{B}$ steht. Im Folgenden werden einige typische solcher (Un)gleichungstypen mit passenden Lösungsstrategien beschrieben.

2.1 Rationale (Un)gleichungen

2.1.1 Allgemeine Form

Gemeint sind hier Ungleichungen des Typs

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \begin{matrix} < \leq \\ > \geq \end{matrix} 0$$

mit $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $Q_m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ und $n, m \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Die Intervallmethode

Die Intervallmethode ist eine Lösungsstrategie zur Lösung von rationalen Ungleichungen. Man geht dabei wie folgt vor: Finde alle Nullstellen $\{c_i\}_{i=1}^{k}$ (sogenannte kritische Punkte)

von P_n und Q_m für ein $\mathbb{N} \ni k \leq m+n$ und trage sie auf der Reelachse auf. Die Funktion $f(x) := \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ behält ihr Vorzeichen zwischen zwei kritischen Stellen bei. Setze anschließend in jedem Intervall (c_i, c_{i+1}) mit $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ einen beliebigen Punkt daraus in f ein, um das Vorzeichen von f auf diesen Intervallen zu bestimmen. Die Nullstellen von Q_m sind als leer gekennzeichnet, also "$\circ$", nicht inklusive, da sie nicht zum Definitionsbereich von f gehören. Dieses Schaubild könnte dann zum Beispiel wie in Abb. 2.1 aussehen.

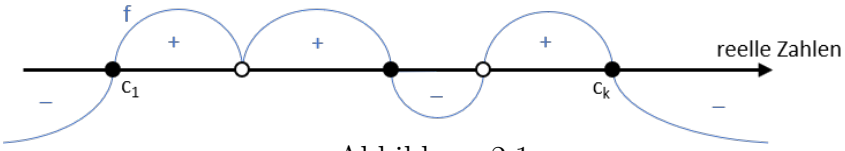


Abbildung 2.1

Bringe die Ungleichung $f(x) \begin{smallmatrix} < \leq \\ > \geq \end{smallmatrix} 0$ in die Form

$$g(x) := \frac{\prod_{i=1}^{\ell}(x-\alpha_i)^{\ell_i}}{\prod_{j=1}^{p}(x-\beta_j)^{p_j}} \begin{smallmatrix} < \leq \\ > \geq \end{smallmatrix} 0$$

mit $\{c_i\}_{i=1}^{k} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\ell} \cup \{\beta_j\}_{j=1}^{p}$ und $\sum_{i=1}^{\ell} \ell_i = n$ sowie $\sum_{j=1}^{p} p_j = m$. Bestimme das Vorzeichen von f bzw. g in $(-\infty, c_1)$ bzw. $(c_k, +\infty)$ und daraus die entsprechende Lösungsmenge.

2.1.3 Vorzeichenregel

Es gilt die folgende Regel bezüglich des Vorzeichens von f auf den einzelnen Teilintervallen: Falls c_i ein α_i oder β_j mit Potenz ℓ_i oder p_j gerade ist, so wechselt das Vorzeichen von f beim Übergang von rechts nach links bei c_j nicht. Andernfalls wechselt das Vorzeichen von f bei c_j.
Im Folgenden werden einige Beispielrechnungen vorgestellt, bei denen die Intervallmethode angewandt wird.

Aufgabe 2.1
Löse

$$f(x) := \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + 3x + 2} > 0.$$

Lösung 2.1

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2(x-3) - (x-3) = (x-3)(x-1)(x+1)$$
$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

kritische Punkte: $-2 \quad -1 \quad 1 \quad 3$

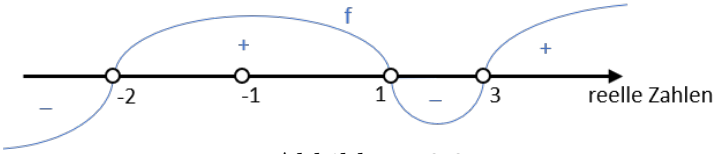


Abbildung 2.2

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)} \quad , \quad x \neq -1$$

Lösungsmenge: $x \in (-2,-1) \cup (-1,1) \cup (3,+\infty)$

Aufgabe 2.2

Löse

$$f(x) := \frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \geq 0.$$

Lösung 2.2

$(x-3)^2 \geq 0$ und $(x+4)^4 \geq 0$ gilt immer, also folgt für $x \neq -4$

$$f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-7)(x+1)}{(x-2)} \geq 0.$$

kritische Punkte: $-1 \quad 2 \quad 7$

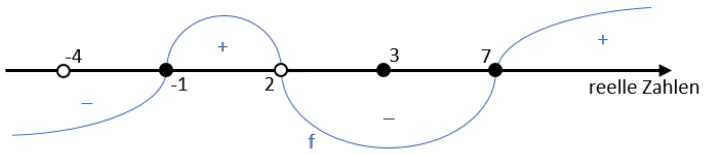


Abbildung 2.3

Lösungsmenge: $x \in [-1, 2) \cup [7, +\infty) \cup \{3\}$

2.2 (Un)gleichungen mit Beträgen

Aufgabe 2.3

Löse

$$|x^2 + 2x| - |2 - x| = |x^2 - x|.$$

Lösung 2.3

Bestimme dafür alle Nullstellen der einzelnen Beträge: $\{-2, 0, 1, 2\}$

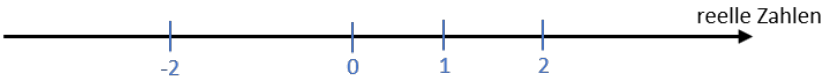


Abbildung 2.4

Nach Abschnitt 2.6.1 (Formelsammlung) treten fünf verschiedene Fälle auf:

a) $x \leq -2$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x - (2 - x) = x^2 - x \\ \iff & 4x = 2 \\ \implies & x = \frac{1}{2} > -2 \\ \implies & \varnothing \end{aligned}$$

b) $x \in [-2, 0]$

$$\begin{aligned} & -x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x \\ \iff & 2x^2 = -2 \\ \implies & \varnothing \end{aligned}$$

c) $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x + x - 2 = x - x^2 \\ \iff & x^2 + x - 1 = 0 \\ \iff & x \in \left\{ \underbrace{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}_{\in[0,1]}, \underbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{<0} \right\} \\ \implies & x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

d) $x \in [1,2]$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x + x - 2 = x^2 - x \\ \iff & x = \frac{1}{2} \notin [1,2] \\ \implies & \varnothing \end{aligned}$$

e) $x \geq 2$

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x - x + 2 = x^2 - x \\ \iff & x = -1 < 2 \\ \implies & \varnothing \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Aufgabe 2.4

Löse

$$\frac{|2x-1|}{x^2-x-2} > \frac{1}{2}.$$

Lösung 2.4

Es treten hier zwei Fälle auf:

$$x \geq \frac{1}{2} \quad \implies \quad \frac{2x-1}{x^2-x-2} > \frac{1}{2} \tag{2.1}$$

$$x < \frac{1}{2} \quad \implies \quad \frac{-2x+1}{x^2-x-2} > \frac{1}{2} \tag{2.2}$$

Zu 2.1:

$$\frac{2x-1}{x^2-x-2} > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{x(5-x)}{(x+1)(x-2)} > 0$$

Mittels der Intervallmethode erhalten wir $x \in \Big[(-1,0) \cup (2,5)\Big] \cap [\frac{1}{2}, +\infty] = (2,5)$.

Zu 2.2:

$$\frac{-2x+1}{x^2-x-2} > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{(1-x)(x+4)}{(x+1)(x-2)} > 0$$

Mittels der Intervallmethode erhalten wir $x \in \Big[(-4,-1) \cup (1,2)\Big] \cap [-\infty, \frac{1}{2}] = (-4,-1)$.

Lösungsmenge: $x \in (-4,-1) \cup (2,5)$

2.3 (Un)gleichungen mit Wurzeln

Aufgabe 2.5
Löse

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1.$$

Lösung 2.5
Definitionsbereich: $x \in [-5, +\infty] \cap [0, +\infty] = [0, +\infty]$
Die Wurzelfunktion ist monoton steigend. Daher gilt für alle $x \geq 0$

$$\sqrt{x+5} > \sqrt{x} \Longleftrightarrow \sqrt{x+5} - \sqrt{x} > 0$$

und damit auch

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x} \\ \Longleftrightarrow\ & x + 5 = 1 + 2\sqrt{x} + x \\ \Longleftrightarrow\ & 2\sqrt{x} = 4 \\ \Longrightarrow\ & \sqrt{x} = 2 \ \Leftrightarrow\ x = 4 \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $x = 4$

Aufgabe 2.6

Löse

$$\sqrt{\underbrace{x^2 - 4x + 3}_{=:g(x)}} \geq 2 - x.$$

Lösung 2.6

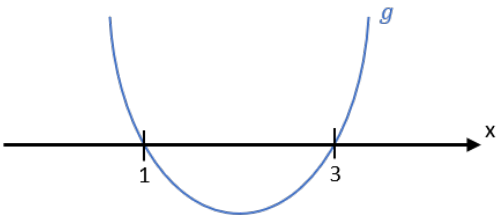


Abbildung 2.5

Definitionsbereich:

$$g(x) \geq 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x-3) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

Es treten nun zwei verschiedene Fälle auf:

a) $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

$$\begin{aligned} & x^2 - 4x + 3 \geq (2-x)^2 \\ \Longleftrightarrow & x^2 - 4x + 3 \geq 4 - 4x + x^2 \\ \Longrightarrow & 3 \geq 4 \\ \Longrightarrow & \varnothing \end{aligned}$$

b) $2 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Da für alle x aus dem Definitionsbereich $\sqrt{g(x)} \geq 0 \geq 2 - x$ gilt, folgt in diesem Fall

$$x \in [(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)] \cap [2, +\infty) = [3, +\infty).$$

Lösungsmenge: $x \in [3, +\infty)$

2.4 Exponentielle (Un)gleichungen

Aufgabe 2.7
Löse

$$|x-3|^{x^2-x} = (x-3)^2.$$

Lösung 2.7
Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
Nach Abschnitt 2.6.4 (Formelsammlung) treten zwei verschiedene Fälle auf:

a) $x \in \{2,4\} \Leftrightarrow |x-3| = 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 1$

$$\begin{aligned} & |x-3|^{x^2-x} = (x-3)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & 1^{x^2-x} = 1 \\ \Longleftrightarrow\ & 1 = 1 \\ \Longrightarrow\ & x \in \{2,4\} \end{aligned}$$

b) $x \notin \{2,4\} \Leftrightarrow |x-3| \neq 1 \Leftrightarrow (x-3)^2 \neq 1$

$$\begin{aligned} & |x-3|^{x^2-x} = (x-3)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & x^2 - x = 2 \\ \Longleftrightarrow\ & x^2 - x - 2 = 0 \\ \Longrightarrow\ & x \in \{2,-1\} \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $x \in \{2,4,-1\}$

Aufgabe 2.8
Löse

$$\underbrace{4 \cdot 9^{x-1}}_{>0} = \underbrace{3\sqrt{2^{2x+1}}}_{>0}.$$

Lösung 2.8
Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$

Wenn auf beiden Seiten der Gleichung der $\log_2(\cdot)$ angewandt wird, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&4 \cdot 9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}} \\
\iff &2 + (x-1)\log_2 9 = \log_2 3 + \frac{2x+1}{2}\log_2 2 \\
\iff &2 + 2(x-1)\log_2 3 = \log_2 3 + x + \frac{1}{2} \\
\iff &\frac{3}{2} + 2x\log_2 3 - 3\log_2 3 - x = 0 \\
\iff &2x(\log_2 3 - \frac{1}{2}) = 3(\log_2 3 - \frac{1}{2}) \\
\iff &x = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $x = \frac{3}{2}$

Aufgabe 2.9

Löse

$$\underbrace{(4x^2 + 2x + 1)}_{=:g(x)}{}^{x^2-x} \leq 1.$$

Lösung 2.9

Die Diskriminante D_g von g ist

$$D_g = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 4 - 16 = -12 < 0.$$

Also hat g keine Nullstellen. Zudem ist g eine nach oben geöffnete Parabel, damit liegt g vollständig oberhalb der x-Achse, das heißt $g(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Definitionsbereich ist folglich ganz $\mathbb{R}$.

Nach Abschnitt 2.6.4 (Formelsammlung) treten zwei verschiedene auf:

a) $g(x) \geq 1 \Rightarrow x^2 - x \leq 0$

$$\begin{aligned}
&g(x) \geq 1 \\
\iff &x\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0 \\
\implies &x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[0, +\infty\right)
\end{aligned}$$

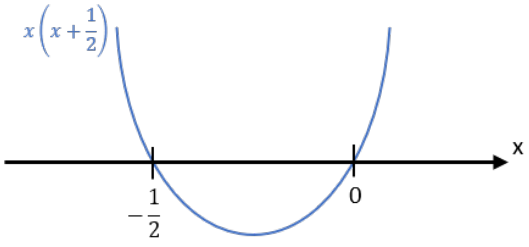


Abbildung 2.6

$$
\begin{aligned}
& x^2 - x \leq 0 \\
\iff & x(x-1) \leq 0 \\
\implies & x \in [0,1]
\end{aligned}
$$

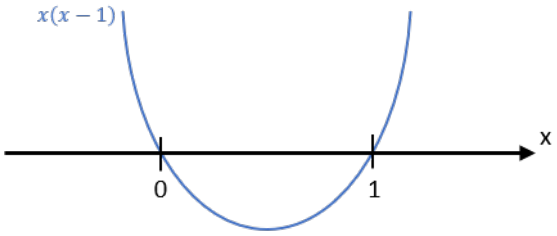


Abbildung 2.7

Zusammen ist also $x \in [0,1]$.

b) $g(x) \leq 1 \Rightarrow x^2 - x \geq 0$

Analog zur Rechnung in a) erhalten wir $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cap \left[(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)\right] = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

Lösungsmenge: $x \in [0,1] \cup \left[-\frac{1}{2}, 0\right] = \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

2.5 Logarithmische (Un)gleichungen

Aufgabe 2.10

Löse

$$f(x) := \log_{0,3}(\log_2(\log_{x-2} 25)) > 0.$$

Lösung 2.10

Da das Argument des Logarithmus größer als 0 und die Basis positiv, aber nicht gleich 1 sein darf, folgt für den Definitionsbereich

$$
\begin{cases} \log_2(\log_{x-2} 25) > 0 \\ \log_{x-2} 25 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ x - 2 \neq 1 \end{cases}
\implies
\begin{cases} \log_{x-2} 25 > 1 \\ x - 2 \in (0, +\infty) \backslash \{1\} \end{cases}
\implies
\begin{cases} 25 < x - 2 & \text{falls } x - 2 \in (0,1) \\ 25 > x - 2 & \text{falls } x - 2 \in (1, +\infty) \end{cases}
$$

und damit $x \in \left[(27, +\infty) \cap (2,3)\right] \cup \left[(-\infty, 27) \cap (3, +\infty)\right] = \varnothing \cup (3,27) = (3,27)$.

Aufgrund des passenden Definitionsbereichs kann die Ungleichung mit $\frac{3}{10} < 1$ und $2 > 1$

potenziert werden. Außerdem ist $x-2>1$, da $x>27>3$ gilt. Wir erhalten damit

$$f(x)>0 \Longleftrightarrow \log_{x-2} 25 < \underbrace{2^{\left(0,3^0\right)}}_{=2} \Longleftrightarrow 25<(x-2)^2 \Longleftrightarrow \underbrace{x^2-4x+21}_{=:g(x)}>0.$$

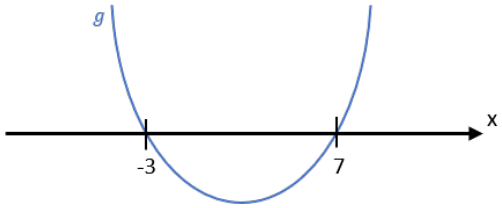


Abbildung 2.8

Lösungsmenge: $x \in (3,27) \cap \Big[(-\infty,-3] \cup [7,+\infty)\Big] = (7,27)$

Aufgabe 2.11

Löse

$$\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0.$$

Lösung 2.11

Analog wie in Lösung 2.10 gilt für den Definitionsbereich

$$\begin{cases} 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ 9x>0 \\ 9x\neq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4>-\frac{1}{4} \\ x\neq 0 \\ x>0 \\ x\neq \frac{1}{9} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq \frac{1}{9} \end{cases}$$

und damit $x \in (0,+\infty)\backslash\left\{\frac{1}{9}\right\}$.

Wir benutzen nun die Logarithmusrechenregel

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

mit $c = 7$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0 &\iff \frac{\log_7 7}{\log_7(4x+1)} = -\frac{\log_7 7}{\log_7(9x)} \\
&\iff \log_7(4x+1) = -\log_7(9x) \\
&\iff \log_7(4x+1) + \log_7(9x) = 0 \\
&\iff \log_7(9x(4x+1)) = 0 \\
&\iff 9x(4x+1) = 1 \\
&\iff x \in \left\{ \frac{1}{12}, \underbrace{-\frac{1}{3}}_{<0} \right\}.
\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $x = \frac{1}{12}$

2.6 Formelsammlung

2.6.1 Umgang mit Beträgen

- Definition des Betrags: $|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn } a \geq 0, \\ -a, & \text{wenn } a < 0. \end{cases}$
- Gleichung $|f(x)| + g(x) = 0$ ist äquivalent zu

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} -f(x) + g(x) = 0, \\ f(x) < 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

2.6.2 (Un)gleichungen mit Wurzeln

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) < (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

2.6.3 Umgang mit Potenzen

$$a^x > 0 \quad \text{für alle } a > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

$$a^x = b \Longleftrightarrow x = \begin{cases} \log_a b, & \text{wenn } a > 0, b > 0, a \neq 1 \\ \varnothing, & \text{wenn } a = 1, b \neq 1 \\ \text{beliebig}, & \text{wenn } a = b = 1. \end{cases} \tag{2.9}$$

Falls m und n natürliche Zahlen sind, gilt $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. (2.10)

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \tag{2.11}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x \tag{2.12}$$

$$(ab)^x = a^x b^x, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \tag{2.13}$$

$$a^0 = 1, a^1 = a \tag{2.14}$$

2.6.4 (Un)gleichungen mit Potenzen

$$a^{g(x)} = a^{h(x)}, a > 0, a \neq 1 \Longleftrightarrow g(x) = h(x)$$

$$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} f(x) = 1 \\ g(x), h(x) \text{ beliebig} \end{cases} \tag{2.15}$$

$$f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) > h(x) \\ f(x) > 1 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} g(x) < h(x) \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \tag{2.16}$$

$$f(x)^{g(x)} \geq f(x)^{h(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g(x) \geq h(x) \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} 0 < f(x) \leq 1 \\ g(x) \leq h(x) \end{cases} \tag{2.17}$$

$$f(x)^{g(x)} < f(x)^{h(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) < h(x) \\ f(x) > 1 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} g(x) > h(x) \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \tag{2.18}$$

$$f(x)^{g(x)} \leq f(x)^{h(x)} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g(x) \leq h(x) \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} 0 < f(x) \leq 1 \\ g(x) \geq h(x) \end{cases} \tag{2.19}$$

2.6.5 Umgang mit Logarithmen

$$a^{\log_a b} = b,\ a > 0, \quad b > 0,\ a \neq 1. \tag{2.20}$$

$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1, \quad a > 0,\ a \neq 1 \tag{2.21}$$

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \quad a, b, c, > 0,\ a \neq 1 \tag{2.22}$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c, \quad a, b, c, > 0,\ a \neq 1 \tag{2.23}$$

$$\log_a(b^x) = x \log_a b, \quad a, b > 0,\ a \neq 1 \tag{2.24}$$

$$\log_{(a^x)} b = \frac{1}{x} \log_a b, \quad a, b > 0,\ a \neq 1, x \neq 0 \tag{2.25}$$

$$\log_a(b^{2n}) = 2n \log_a\ |b|, \quad a > 0,\ a \neq 1, b \neq 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{2.26}$$

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b, \quad a, b > 0,\ a \neq 1 \tag{2.27}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a, b, c > 0,\ a, c \neq 1 \tag{2.28}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad a, b > 0,\ a, b \neq 1 \tag{2.29}$$

$$\log_a(bc) = \log_a |b| + \log_a |c|, \quad a > 0,\ b \cdot c > 0, a \neq 1 \tag{2.30}$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a |b| - \log_a |c|, \quad a > 0,\ b \cdot c > 0, a \neq 1 \tag{2.31}$$

2.6.6 (Un)gleichungen mit Logarithmen

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\log_a g(x) = \log_a h(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \quad \text{falls } a > 0,\ a \neq 1. \tag{2.33}$$

$$\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) > h(x) \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} h(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \tag{2.34}$$

$$\log_{f(x)} g(x) \geq \log_{f(x)} h(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq h(x) \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} h(x) \geq g(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \tag{2.35}$$

$$\log_{f(x)} g(x) < \log_{f(x)} h(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) < h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} h(x) < g(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \tag{2.36}$$

$$\log_{f(x)} g(x) \leq \log_{f(x)} h(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \leq h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} h(x) \leq g(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases} \tag{2.37}$$

Falls a, b Zahlen mit $a > 0, a \neq 1$ sind, gilt

$$\log_a f(x) = b \Longleftrightarrow f(x) = a^b, \tag{2.38}$$

$$\log_a f(x) > b \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^b, & a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b, & a < 1, \end{cases} \tag{2.39}$$

$$log_a f(x) \geq b \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq a^b, & a > 1 \\ 0 < f(x) \leq a^b, & a < 1, \end{cases} \tag{2.40}$$

$$\log_a f(x) < b \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^b, & a > 1 \\ f(x) > a^b, & a < 1, \end{cases} \tag{2.41}$$

$$\log_a f(x) \leq b \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) \leq a^b, & a > 1 \\ f(x) \geq a^b, & a < 1. \end{cases} \tag{2.42}$$

2.6.7 Ableitungen

Jede Konstante ergibt abgeleitet 0. Zudem gelten:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \tag{2.43}$$

$$(\sin x)' = \cos x \tag{2.44}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{2.45}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{2.46}$$

2.7 Übungsaufgaben

Löse die folgenden (Un)gleichungen.

Aufgabe 2.12

$$\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}}$$

Aufgabe 2.13

$$4\sqrt{x+2} = |x+1| + 4$$

Aufgabe 2.14

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 1$$

Aufgabe 2.15

$$|x^2+3x+2| + 4x + 10 = 0$$

Aufgabe 2.16

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2xy = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

Aufgabe 2.17

$$\begin{cases} 2|x-1| + 3|y+2| = 17 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Aufgabe 2.18

$$\begin{cases} y\sqrt{y} + \sqrt{y} = 5\sqrt{x} - x\sqrt{x} \\ x = y + 3 \end{cases}$$

Aufgabe 2.19

$$(x^2 - 18x + 77)\sqrt{10 - x} \geq 0$$

Aufgabe 2.20

$$2x - 17 < \sqrt{81 - x^2}$$

Aufgabe 2.21

$$\frac{(2 - x^2)(x - 3)^3}{(x + 1)(x^2 - 3x - 4)} \geq 0$$

Aufgabe 2.22

$$\sqrt{3x - 4} + \sqrt{2x - 13} > \sqrt{13 - 2x}$$

Aufgabe 2.23

$$\left| x - \frac{4}{x} - 2 \right| \geq 1$$

Aufgabe 2.24

Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das folgende System mindestens eine Lösung?

$$\begin{cases} ax - 1 \leq 0 \\ x - 4a \geq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2.25

Für welches $x \in \mathbb{R}$ nimmt die Funktion $f(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ ihr Minimum an? Berechne

$$m := \min_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

Aufgabe 2.26

$$\sqrt{\left(\frac{x + 1}{3 - 2x}\right)^2} > 1$$

Aufgabe 2.27

$$\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$$

Aufgabe 2.28

$$\frac{2}{2-x}+\frac{3}{2+x}\geq\frac{4x}{4-x^2}$$

Aufgabe 2.29

Beweise

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq x+y+z \quad \text{für alle } x,y,z>0.$$

Aufgabe 2.30

$$25^{|1-2x|}=5^{4-6x}$$

Aufgabe 2.31

Für welches $a\in\mathbb{R}$ hat

$$\log_{x-1}(x+a)=\frac{1}{2}$$

nur eine einzige Lösung?

Aufgabe 2.32

$$1-\log_9(x+1)^2=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)$$

Aufgabe 2.33

$$\log_{x+a}x\leq\log_a x^2 \quad \text{für } a\neq 1, a>0.$$

Aufgabe 2.34

$$5^{\log_2 x}+2x^{\log_2 5}=15$$

Aufgabe 2.35

$$\log_{10}\sqrt{x-5}+\log_{10}\sqrt{2x-3}+1=\log_{10}30$$

Aufgabe 2.36

$$4^{\log_3(1-x)} = (2x^2 + 2x - 5)^{\log_3 2}$$

Aufgabe 2.37

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1 \quad \text{für } a \in (0,1)$$

Aufgabe 2.38

Finde die Summe der Lösungen von

$$x + 1 = 2\log_2(2^x + 3) - 2\log_4(1983 - 2^{-x}).$$

Aufgabe 2.39

$$\sqrt{4\log_4 x - 2} + \sqrt{1 + \log_2 x} = 4$$

Aufgabe 2.40

$$3^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[4]{27^{2x-1}}$$

Aufgabe 2.41

$$\log_3 \log_{\frac{9}{16}}(x^2 - 4x + 3) \leq 0$$

Aufgabe 2.42

$$(x^2 + x + 1)^x < 1$$

Aufgabe 2.43

$$\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$$

Aufgabe 2.44

$$\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2 \\ -(\log_x(0,2))^3 + y = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 2.45

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-x^2-2x}{14}\right) > 1$$

3 Trigonometrie

Ein weiteres Teilgebiet der Mathematik, zu dem verschiedenste (Un)gleichungen formuliert werden können, ist die Trigonometrie. Gesucht ist für diese (Un)gleichungen wieder eine Lösungsmenge. Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen werden nun allerdings auch oft diskrete, unendliche Lösungsmengen herauskommen.
Im Folgenden werden einige typische trigonometrische (Un)gleichungstypen mit passenden Lösungsstrategien beschrieben.

3.1 Die Hilfsargumenten-Methode

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 > 0$ gilt

$$a\sin(x) \pm b\cos(x) = \left(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos(\varphi)} \sin(x) \pm \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin(\varphi)} \cos(x) \right) \cdot \sqrt{a^2+b^2}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \Big(\sin(x)\cos(\varphi) \pm \cos(x)\sin(\varphi) \Big) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x \pm \varphi).$$

Dies folgt aus

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^2 = \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$$

mit $\varphi = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$. Insbesondere gilt

$$\sin(x) \pm \cos(x) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4} \right),$$

denn $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4} \right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} \right)$.

Aufgabe 3.1
Löse

$$12\cos(x) - 5\sin(x) = -13.$$

Lösung 3.1
Es ist $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$, somit gilt $\frac{12}{13}\cos(x) - \frac{5}{13}\sin(x) = -1$. Sei $\varphi = \arcsin\left(\frac{12}{13}\right)$, dann folgt

$$\begin{aligned} 12\cos(x) - 5\sin(x) = -13 &\iff \sin(\varphi)\cos(x) - \cos(\varphi)\sin(x) = -1 \\ &\iff \sin(\varphi - x) = -1 \\ &\iff \varphi - x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\,,\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{12}{13}\right) + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\right\}$

3.2 Zurückführen auf ein Polynom von einer trigonometrischen Funktion

Aufgabe 3.2
Löse

$$\sin(3x) + \cos(2x) = 1.$$

Lösung 3.2
Transformiere die linke Seite zu einem Polynom von $\sin(x)$. Nach Formel (3.21) und (3.26) (Formelsammlung) gilt

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \quad \text{und} \quad \sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).$$

Damit folgt

$$1 - 2\sin^2(x) + 3\sin(x) - 4\sin^3(x) = 1 \iff \sin(x)\big(3 - 4\sin^2(x) - 2\sin(x)\big) = 0.$$

$$3 - 4\sin^2(x) - 2\sin(x) = 0$$

Substituiere $t = \sin(x)$:

$$-4t^2 - 2t + 3 = 0$$

$\sin(x) = 0$

$\Downarrow$

$x = \pi n\,,\ n \in \mathbb{Z}$

Berechne die Diskriminante:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 3 = 52 = 4 \cdot 13$$

$$\Longrightarrow \qquad t_{\pm} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 13}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}$$

Rücksubstitution:

$$\sin(x) = t_- = \frac{-1 - \sqrt{13}}{4} < -1 \Rightarrow \varnothing$$

$$\sin(x) = t_+ = \frac{\sqrt{13} - 1}{4} \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{13} - 1}{4}\right) + \pi n\,,\ n \in \mathbb{Z}$$

Lösungsmenge: $x \in \left\{\pi n : n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^n \arcsin\left(\frac{\sqrt{13} - 1}{4}\right) + \pi n : n \in \mathbb{Z}\right\}$

Aufgabe 3.3

Löse

$$5\sin(2x) - 5\cos(2x) = \tan(x) + 5. \tag{3.1}$$

Lösung 3.3

Transformiere dies zu einer rationalen Funktion von $\tan(x)$:

Es gilt

$$1 + \tan^2(x) = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

und damit

$$\sin(2x) \overset{(3.20)}{=} 2\sin(x)\cos(x) = 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cos^2(x) = 2\tan(x)\cos^2(x) = \frac{2\tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

sowie

$$\cos(2x) \overset{(3.21)}{=} \cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} - \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\cos^2(x)$$
$$= \frac{1}{1+\tan^2(x)} - \frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}.$$

Zusammen folgt mittels Gleichung (3.1) die neue Gleichung

$$\frac{2\tan(x) - 1 + \tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} = \frac{\tan(x)}{5} + 1. \tag{3.2}$$

Gleichung (3.1) und (3.2) sind äquivalent, da sie den gleichen Definitionsbereich besitzen. Substituiere nun $t = \tan(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{2t-1+t^2}{1+t^2} = \frac{t}{5} + 1 &\iff \frac{t^2 + 2t - 1 - \frac{t}{5}\left(t^2+1\right) - t^2 - 1}{t^2+1} = 0 \\
&\iff \frac{-t^3 + 5t^2 + 10t - 5 - 5t^2 - 5 - t}{t^2+1} = 0 \\
&\iff \frac{t^3 - 9t + 10}{\underbrace{t^2+1}_{\geq 1}} = 0 \\
&\iff t^3 - 9t + 10 = 0
\end{aligned}$$

Mittels Polynomdivision erhalten wir

$$t^3 - 9t + 10 = \left(t-2\right)\left(t^2+2t-5\right) = \left(t-2\right)\left(t+1-\sqrt{6}\right)\left(t+1+\sqrt{6}\right)$$

und damit auch

$$\begin{aligned}
\frac{2t-1+t^2}{1+t^2} = \frac{t}{5} + 1 &\iff \left(t-2\right)\left(t+1-\sqrt{6}\right)\left(t+1+\sqrt{6}\right) = 0 \\
&\iff t \in \left\{2, -1+\sqrt{6}, -1-\sqrt{6}\right\}.
\end{aligned}$$

Rücksubstitution	Rücksubstitution	Rücksubstitution
$\tan(x) = t = 2$	$\tan(x) = t = -1 + \sqrt{6}$	$\tan(x) = t = -1 - \sqrt{6}$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$x = \arctan(2) + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = \arctan(-1 + \sqrt{6}) + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$x = -\arctan(1 + \sqrt{6}) + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$

Lösungsmenge:

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \arctan(2) + \pi n, \arctan(-1 + \sqrt{6}) + \pi n, -\arctan(1 + \sqrt{6}) + \pi n \right\}$$

3.3 Polynomdivision

Es soll das Polynom

$$a(x) = \sum_{k=0}^{n_a} a_k x^k \,,\ n_a \geq 1$$

durch das Polynom

$$b(x) = \sum_{k=0}^{n_b} b_k x^k$$

mit $\mathrm{Deg}(b) = n_b \leq n_a = \mathrm{Deg}(a)$ geteilt werden. Gesucht sind also Polynome $q(x)$ und $r(x)$, sodass

$$a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$$

mit $\mathrm{Deg}(r) < \mathrm{Deg}(b)$.

Beispiel:

$a(x) = x^4 + 6x^3 - 3x^2 - x + 1$

$b(x) = x^2 - 2x + 3$

$$
\begin{array}{l}
\Big(\quad x^4 + 6x^3 \; - 3x^2 \quad - x \; + 1\Big) : \Big(x^2 - 2x + 3\Big) = x^2 + 8x + 10 + \dfrac{-5x - 29}{x^2 - 2x + 3} \\
\underline{\; - x^4 + 2x^3 \; - 3x^2 \;} \\
\qquad\quad 8x^3 \; - 6x^2 \quad - x \\
\qquad \underline{- 8x^3 + 16x^2 - 24x} \\
\qquad\qquad\quad 10x^2 - 25x \; + 1 \\
\qquad\qquad \underline{- 10x^2 + 20x - 30} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 5x - 29
\end{array}
$$

Demnach erhalten wir $q(x) = x^2 + 8x + 10$ und $r(x) = -5x - 29$.

Aufgabe 3.4

In Lösung 3.3 wurde eine Faktorisierung von $a(t) = t^3 - 9t + 10$ gesucht. Finde diese mithilfe einer Polynomdivision.

Lösung 3.4

Wir raten zunächst die Nullstelle $t_0 = 2$:

$$a(t_0) = 2^3 - 9 \cdot 2 + 10 = 8 - 18 + 10 = 0$$

Nun setzen wir $b(t) = (t - t_0) = (t - 2)$ und führen die Polynomdivision mit $a(t)$ und $b(t)$ durch.

$$
\begin{array}{l}
\Big(\quad t^3 \qquad - 9t + 10\Big) : \Big(t - 2\Big) = t^2 + 2t - 5 \\
\underline{\; - t^3 + 2t^2 \;} \\
\qquad\; 2t^2 - 9t \\
\quad \underline{- 2t^2 + 4t} \\
\qquad\quad - 5t + 10 \\
\qquad\quad \underline{\;\; 5t - 10} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Durch die Mitternachtsformel bekommen wir zudem $t^2 + 2t - 5 = \left(t + 1 - \sqrt{6}\right)\left(t + 1 + \sqrt{6}\right)$ und damit die Faktorisierung

$$t^3 - 9t + 10 = \left(t - 2\right)\left(t + 1 - \sqrt{6}\right)\left(t + 1 + \sqrt{6}\right).$$

3.4 Ausnutzung von Ungleichungen und Monotonie

Aufgabe 3.5
Löse

$$\sin(3x) + \cos(2x) + 2 = 0.$$

Lösung 3.5
Da $|\sin(3x)| \leq 1$ und $|\cos(2x)| \leq 1$ ist, gilt

$$\sin(3x) + cos(2x) = -2 \iff \begin{cases} \sin(3x) = -1 \\ \cos(2x) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 2x = \pi + 2\pi n \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ überall beliebig.
Lösungsmenge: $x \in \left\{ -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} : n \in \mathbb{Z} \right\} \cap \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n : n \in \mathbb{Z} \right\}$

Aufgabe 3.6
Für gewisse $x, y \in \mathbb{R}$ gelte die Gleichung

$$x + e^x = y + e^y.$$

Gilt für solche x, y auch die Gleichung

$$\sin(x) + \cos(y) = \cos(x) + \sin(y)?$$

Lösung 3.6
Da $x + e^x = y + e^y$ für ein festes (x, y)-Paar gilt und die Funktion $f(x) = x + e^x$ streng monoton wächst, gilt $x = y$. Damit folgt direkt

$$\sin(x) + \cos(y) = \sin(x) + \cos(x) = \cos(x) + \sin(x) = \cos(x) + \sin(y).$$

3.5 Summation von trigonometrischen Funktionen mit Hilfe von erzeugenden Funktionen

Oft ist der Wert einer Summe

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

von trigonometrischen Funktionen u_k gefragt. Eine *erzeugende Funktion* $f(k)$ ist eine Funktion, für die $f(k+1) - f(k) = u_k$ gilt. Falls solch ein f existiert, gilt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \big[f(k+1) - f(k) \big] = f(n+1) - f(1).$$

Aufgabe 3.7
Finde eine direkte Formel für den Ausdruck

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(\alpha + kh),$$

sodass nicht Summe mit n Summanden berechnet werden muss

Lösung 3.7
Ziel ist es, eine erzeugende Funktion f zu finden:
Durch die Formel

$$\cos(x) - \cos(y) \overset{(3.30)}{=} -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{3.3}$$

gilt

$$\cos\left(\alpha + \frac{2k+1}{2}h\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2k-1}{2}h\right) = -2 \sin\Bigg(\underbrace{\frac{2\alpha + \frac{2k}{2}2h}{2}}_{=\alpha+kh} \Bigg) \sin\Bigg(\underbrace{\frac{\alpha + \frac{2k+1}{2}h - \alpha - \frac{2k-1}{2}h}{2}}_{=\frac{h}{2}} \Bigg).$$

Damit folgt

$$\sin(\alpha + kh) = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{2k+1}{2}h\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2k-1}{2}h\right)}{-2\sin\left(\frac{h}{2}\right)} = f(k+1) - f(k)$$

mit

$$f(k) := -\frac{\cos\left(\alpha + \frac{2k-1}{2}h\right)}{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[f(k+1) - f(k)\right] = f(n) - f(0) \\ &= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{2n+1}{2}h\right) - \cos\left(\alpha - \frac{h}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{h}{2}\right)} \overset{(3.3)}{=} \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n}{2}h\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}h\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Lösungsformel:

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(\alpha + kh) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n}{2}h\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}h\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$$

3.6 Umwandlung von Summen und Produkten

Aufgabe 3.8

Löse

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = \frac{1}{2}.$$

Lösung 3.8

Es gelten die beiden Identitäten

$$\begin{cases} \cos(x) - \cos(y) \overset{(3.30)}{=} -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos(x) + \cos(y) \overset{(3.29)}{=} 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{cases}. \tag{3.4}$$

Dadurch gilt

$$\begin{aligned}
&\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]\\
&\overset{(3.4)}{=}-4\sin\left(\frac{\frac{\pi}{8}-x+\frac{\pi}{8}+x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi}{8}-x-\frac{\pi}{8}-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\frac{\pi}{8}-x+\frac{\pi}{8}+x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\frac{\pi}{8}-x-\frac{\pi}{8}-x}{2}\right)\\
&=4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cdot 2\sin(x)\cos(x)\\
&=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x)
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=\frac{1}{2} &\iff \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x)=\frac{1}{2}\\
&\iff \sin(2x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\iff 2x=\frac{\pi}{4}(-1)^n+\pi n\,,\ n\in\mathbb{Z}\\
&\iff x=\frac{\pi}{8}(-1)^n+\frac{\pi}{2}n\,,\ n\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $x\in\left\{\frac{\pi}{8}(-1)^n+\frac{n\pi}{2}:n\in\mathbb{Z}\right\}$

3.7 Lösen von Ungleichungen

Aufgabe 3.9

Löse

$$\operatorname{arccot}^2(x)-5\operatorname{arccot}(x)+6>0.$$

Lösung 3.9

Substituiere $t=\operatorname{arccot}(x)$:

$$\underbrace{t^2-5t+6}_{=:f(t)}>0$$

Es gilt $D_g = 25 - 4 \cdot 6 = 1$ und somit

$$f(t) = 0 \iff t_{\pm} = \frac{5 \pm 1}{2 \cdot 1} \iff t \in \{2, 3\}.$$

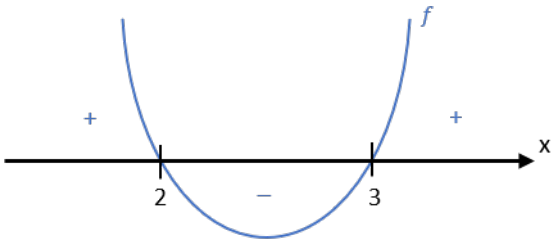


Abbildung 3.1

Es folgt also (s. Abb. 3.1)

$$\operatorname{arccot}^2(x) - 5\operatorname{arccot}(x) + 6 > 0 \iff \operatorname{arccot}(x) < 2 \quad \text{oder} \quad \operatorname{arccot}(x) > 3.$$

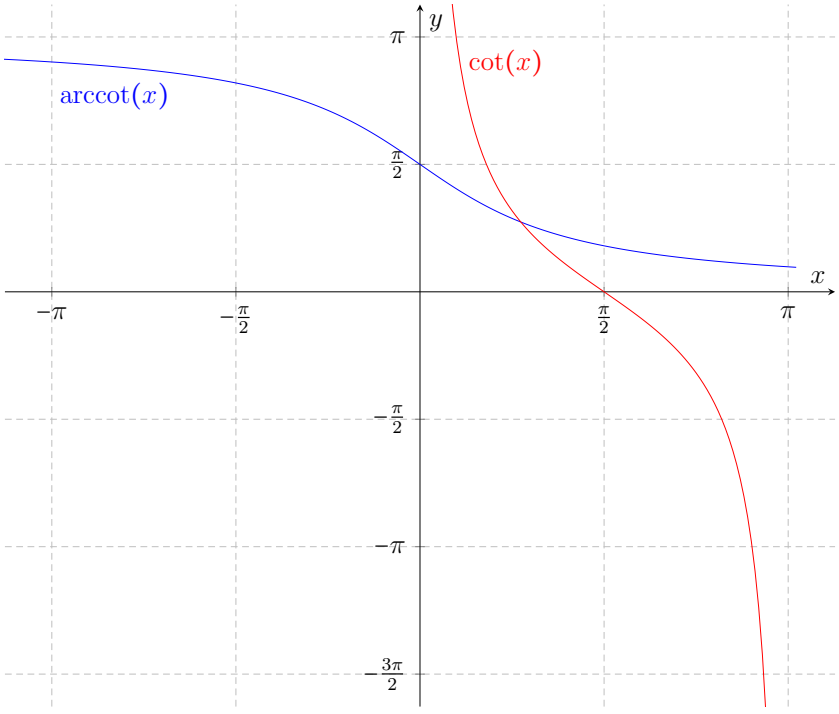


Abbildung 3.2

In Abb. 3.2 ist zu sehen, dass der Arkuskotangens monoton fallend ist. Daraus können wir

$$\operatorname{arccot}(x) < 2 \Longleftrightarrow x > \cot(2)$$
$$\operatorname{arccot}(x) > 3 \Longleftrightarrow x < \cot(3)$$

schließen.
Lösungsmenge: $x \in (-\infty, \cot 3) \cup (\cot 2, +\infty)$

Aufgabe 3.10
Beweise, dass

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \geq 6,$$

falls α, β und γ Winkel in einem Dreieck sind.

Lösung 3.10
Es gilt $\alpha, \beta, \gamma > 0$ und $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Daraus ergibt sich auch $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} > 0$. Benutze nun die Ungleichung

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

mit $x_1, \ldots, x_n > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel. In unserem Fall ist $n = 3$:

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}}$$

Nun gilt nach Voraussetzung

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{\gamma + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \cos\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

und damit auch (s. Abb. 3.3)

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Bigg[\underbrace{\cos\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)}_{<1} - \cos\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\Bigg]$$
$$< \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \le \frac{1}{2}\max_{\alpha\in\mathbb{R}}\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right]$$
$$\le \frac{1}{2}\max_{y\in[0,1]}\Big[y(1-y)\Big] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

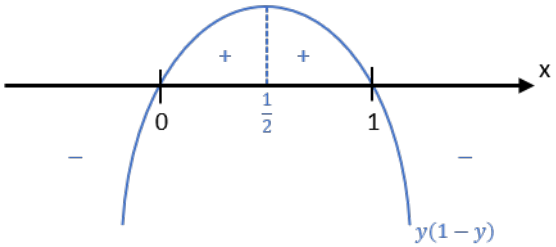


Abbildung 3.3

Zusammen folgt

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = 3\cdot 2 = 6.$$

□

Aufgabe 3.11

Löse

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) < 0. \tag{3.5}$$

Lösung 3.11

Zerlege mithilfe von Formel (3.29) (Formelsammlung) die linke Seite in Faktoren

$$\cos(x) + \cos(3x) = 2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) = 2\cos(2x)\cos(x)$$

und schreibe

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos(x) + \cos(2x) = \cos(2x)\big(2\cos(x)+1\big).$$

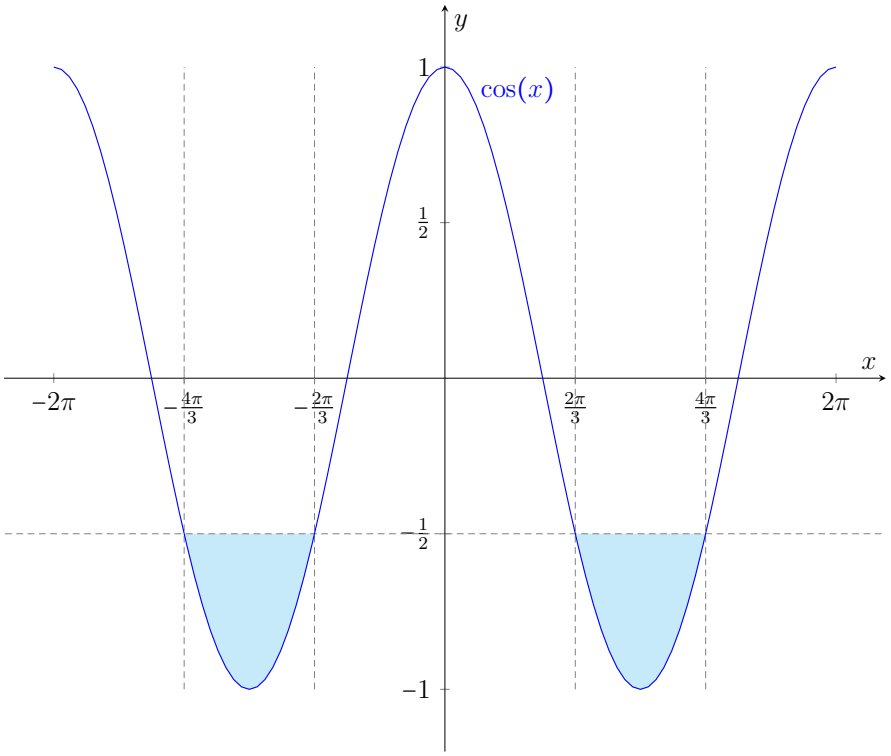


Abbildung 3.4

In Abb. 3.4 ist zu sehen, in welchen Intervallen der Cosinus kleiner als $-\frac{1}{2}$ ist. Daraus lässt sich

$$
\begin{aligned}
(3.5) &\iff \cos(2x)\big(2\cos(x)+1\big) < 0 \\
&\iff \begin{cases} \cos(2x) > 0 \\ 2\cos(x)+1 < 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \cos(2x) < 0 \\ 2\cos(x)+1 > 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right) \\ \cos(x) < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} 2x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right) \\ \cos(x) > -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z} \\
&\iff \begin{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi n\right) \\ x \in \left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right) \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x \in \left(\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{3\pi}{4}+\pi n\right) \\ x \in \left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \frac{2\pi}{3}+\pi n\right) \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

folgern.

Lösungsmenge:

$$
x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left[\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n, \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n, \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right) \right]
$$

3.8 Lösung von Gleichungssystemen

Aufgabe 3.12
Löse das System

$$\begin{cases} \cos(x)\cos(y) = -\frac{1}{4} \\ \tan(y) = \cot(x) \end{cases}.$$

Lösung 3.12
Definitionsbereich: $x \notin \{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$, $y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n : n \in \mathbb{Z}\right\}$

Zusammen mit Formel (3.17) aus der Formelsammlung gilt

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \cos(x)\cos(y) = -\frac{1}{4} \\ \tan(y) = \cot(x) \end{cases} &\iff \begin{cases} \cos(x)\cos(y) = -\frac{1}{4} \\ \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \cos(x)\cos(y) = -\frac{1}{4} \\ \sin(x)\sin(y) = \cos(x)\cos(y) \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} \cos(x)\cos(y) = -\frac{1}{4} \\ \sin(x)\sin(y) = -\frac{1}{4} \end{cases} \\
&\overset{(3.17)}{\implies} \begin{cases} \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) = \cos(x+y) = 0 \\ \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x - y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \qquad n, k \in \mathbb{Z} \\
&\implies \begin{cases} 2x = (x+y) + (x-y) = \pm\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi k + 2\pi n \\ 2y = (x+y) - (x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi m \mp \frac{2\pi}{3} + 2\pi \ell \end{cases} \qquad n, k, m, \ell \in \mathbb{Z} \\
&\implies \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + \pi\left(n + \frac{k}{2}\right) \\ y = \frac{\pi}{4} \mp \frac{\pi}{3} + \pi\left(\ell + \frac{m}{2}\right) \end{cases} \qquad n, k, m, \ell \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + \pi\left(n + \frac{k}{2}\right) : n, k \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$y \in \left\{ \frac{\pi}{4} \mp \frac{\pi}{3} + \pi\left(\ell + \frac{m}{2}\right) : m, \ell \in \mathbb{Z} \right\}$$

3.9 Formelsammlung

3.9.1 Reduktion auf Grundgleichungen

Alle trigonometrischen Gleichungen werden gelöst durch Reduktion auf eine der vier Grundgleichungen:

$$\sin x = a \Longleftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin a + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}, & \text{wenn } |a| \leq 1, \\ \varnothing, & \text{wenn } |a| > 1; \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\cos x = a \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, & \text{wenn } |a| \leq 1, \\ \varnothing, & \text{wenn } |a| > 1; \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\tan x = a \Longleftrightarrow x = \arctan\ a + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \tag{3.8}$$

$$\cot x = a \Longleftrightarrow x = \operatorname{arccot}\ a + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \tag{3.9}$$

Darüber hinaus ist es wichtig, folgende speziellere Lösungen zu kennen:

$$\sin x = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \tag{3.10}$$

$$\sin x = 0 \Longleftrightarrow x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \tag{3.11}$$

$$\sin x = -1 \Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \tag{3.12}$$

$$\cos x = 1 \Longleftrightarrow x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \tag{3.13}$$

$$\cos x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \tag{3.14}$$

$$\cos x = -1 \Longleftrightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \tag{3.15}$$

Folgende Formeln werden verwendet, um Gleichungen zu vereinfachen:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \tag{3.16}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{3.17}$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan\ x\ \tan\ y} \tag{3.18}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{3.19}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \tag{3.20}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \tag{3.21}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \tag{3.22}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},\quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \tag{3.23}$$

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.24}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \tag{3.25}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,\quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \tag{3.26}$$

Die Gruppierung und Faktorisierung erfolgt durch die folgenden Formeln:

$$\tan\ x \pm \tan\ y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y} \tag{3.27}$$

$$\sin\ x \pm \sin\ y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2} \tag{3.28}$$

$$\cos\ x + \cos\ y = 2\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} \tag{3.29}$$

$$\cos\ x - \cos\ y = -2\sin\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2} \tag{3.30}$$

$$\sin\ x \sin\ y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)) \tag{3.31}$$

$$\sin\ x \cos\ y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)) \tag{3.32}$$

$$\cos\ x \cos\ y = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y)) \tag{3.33}$$

3.9.2 Hilfsargumenten-Methode

Es gilt

$$\begin{aligned} a\sin x \pm b\cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}(\sin x \cos\varphi \pm \cos x \sin\varphi) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x \pm \varphi), \end{aligned}$$

wobei $\varphi = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn } a \geq 0, \\ -a, & \text{wenn } a \leq 0 \end{cases}$$

3.10 Übungsaufgaben

3.10.1 Gleichungen

Löse die folgenden Gleichungen.

Aufgabe 3.13

$$3\sin(x) + 4\cos(x) = 5$$

Aufgabe 3.14

$$\sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x) = \sqrt{3}$$

Aufgabe 3.15

$$\sqrt{3}\cos(x) + \cot^2(x) = \frac{\sin^3(x) + 1}{\sin^2(x)}$$

Aufgabe 3.16
Beweise die Identität

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

Aufgabe 3.17
Es seien α, β, γ Winkelmaße in einem Dreieck. Zeige, dass

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1.$$

Aufgabe 3.18
Berechne die folgenden Summen:

1. $\cos(3\alpha) + \cos(5\alpha) + \cos(7\alpha) + \cdots + \cos((2n+1)\alpha)$
2. $\tan(\alpha) + \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right) + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

Aufgabe 3.19
Beweise, dass die Gleichung

$$(\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x))\sin(4x) = 2$$

keine Lösung besitzt.

Aufgabe 3.20
Beweise, dass

$$\sin^2(x)\cos^2(x) \leq \frac{1}{4}$$

Aufgabe 3.21
Finde

1. $\cos\left(2\arcsin\left(\frac{3}{4}\right)\right)$
2. $\cos(2\operatorname{arccot}(-2))$

3.10.2 Ungleichungen

Löse die folgenden Ungleichungen.

Aufgabe 3.22

$$1 + \cos(2x) \geq \cos(x)(1 + |1 - 2\cos(x)|)$$

Aufgabe 3.23

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \cos(2x)} \geq \sin(x) - \cos(x)$$

Aufgabe 3.24

$$\sin(x) < |\cos(x)|$$

Aufgabe 3.25

Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Ungleichung

$$\tan^2(\cos(\sqrt{4\pi^2 - x^2})) - 4a\tan(\cos(\sqrt{4\pi^2 - x^2})) + 2 + 2a \leq 0$$

eine endliche Anzahl von Lösungen? Finde diese Lösungen.

Aufgabe 3.26
Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$(\arcsin(x))^3 + (\arccos(x))^3 = a$$

eine eindeutige Lösung?

Aufgabe 3.27
Finde alle Lösungen der Gleichung

$$\int_0^{\alpha} \cos(x + \alpha^2)dx = \sin(\alpha),$$

welche im Intervall $[2, 3]$ liegen.

3.10.3 Weitere Gleichungen

Löse die folgenden Gleichungen.

Aufgabe 3.28

$$\tan^2(x)\tan^2(3x) = 1$$

Aufgabe 3.29

$$\sin^4(x) + \cos^4(x) = \frac{5}{8}$$

Aufgabe 3.30

$$\frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{\cos(x)} = 2\sqrt{2}$$

Aufgabe 3.31

$$\tan(x)\tan\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Aufgabe 3.32

$$2\tan(2x) + \tan(3x) = \tan(5x)$$

Aufgabe 3.33

$$2\cos(x) = \sqrt{2 + \sin(3x)}$$

Aufgabe 3.34
Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung

$$\sqrt{\sin(x)} - \sqrt{\cos(x)} = a$$

Lösungen?

Aufgabe 3.35
Finde alle $p \in \mathbb{R}$, für welche die Gleichung

$$\sin(x) + p\cos(x) = 2p$$

Lösungen besitzt.

3.10.4 Gleichungssysteme

Löse die folgenden Gleichungssysteme.

Aufgabe 3.36

$$\begin{cases} \tan(x)\tan(2y) = 1, \\ \sqrt{3}\sin(2x) - 3\cos(2y) = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3.37

$$\begin{cases} 2\sin(x)\sin(y) = \cos(2x) + \cos(2y), \\ 2\cos(x)\sin(y) = \cos(2x) - \cos(2y) \end{cases}$$

Aufgabe 3.38

$$\begin{cases} \sin(x) + \sin(z) = \sqrt{2}\cos(y), \\ \cos(x) + \cos(z) = \sqrt{2}\sin(y), \\ \cos(2y) + \cos(2z) = \sin(2x) \end{cases}$$

Aufgabe 3.39

$$\begin{cases} \sin(x) + \tan(y) = 0, \\ \sin^2(x) + \tan^2(y) = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 3.40

$$\begin{cases} \sqrt{\sin(x)}\cos(y) = 0, \\ 2\sin^2(x) - \cos(2y) - 2 = 0 \end{cases}$$

4 Gleichungssysteme

In der linearen Algebra werden lineare Gleichungssysteme benutzt, um verschiedenste Sachverhalte im $\mathbb{R}^n$ mathematisch beschreiben zu können. Aber auch nicht-lineare Gleichungssysteme, deren Lösungsstrategien um einiges komplizierter sein können, werden in diesem Kapitel von Interesse sein. Außerdem werden wir nicht immer an einer expliziten Lösungsmenge interessiert sein. In der Mathematik kann es manchmal nützlich und zielführend sein, einen Ausdruck in Abhängigkeit des Gleichungssystems zu berechnen, ohne die genaue Lösungsmenge zu kennen.

4.1 Lineare Gleichungssysteme

Gemeint sind hier Gleichungssysteme der Form

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

zusammen mit der dazugehörigen Matrixschreibweise $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eine $m \times n$-Matrix und

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Vektoren sind. Das System (4.1) lässt sich auch abgekürzt als

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{4.2}$$

schreiben.

4.2 Das Gauß-Verfahren

Das Gauß-Verfahren ist eine Lösungsmethode für lineare Gleichungssysteme, also Gleichungssysteme wie in (4.1). Ziel des Verfahrens ist es, die abgekürzte Schreibweise (4.2) in eine äquivalente Form zu bringen, die eine obere Dreiecksstruktur besitzt, also eine Form des Typs

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{4.3}$$

Bei einer solchen Form sind alle Einträge unterhalb der Diagonalen gleich 0. Das zu (4.3) gehörende lineare Gleichungssystem soll dabei für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ genau dann erfüllt sein, wenn x_0 eine Lösung für (4.1) ist. Die Umformungsschritte, die (4.2) in (4.3) umformen, sollen also die Lösungsmenge von (4.1) nicht verändern.

Aufgabe 4.1
Löse

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 & = 6 \end{cases}$$

mit $m = n = 3$.

Lösung 4.1
Um dieses System zunächst in die abgekürzte Schreibweise umformen zu können, benötigen wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Die abgekürzte Schreibweise lautet also

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Wende das Gauß-Verfahren an:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot (-3) \\ \longleftarrow + \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & -8 & -18 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot (-2) \\ \mid \cdot (-1) \\ \longleftarrow + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 8 & 18 \\ 0 & -3 & -4 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot (3) \\ \mid \cdot (5) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Wenn diese verkürzte Schreibweise wieder in ein lineares Gleichungssystem umgeformt wird, erhalten wir

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 & = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 8 \\ 5x_2 + 8x_3 & = 18 \\ 4x_3 & = 4 \end{cases}$$

Von unten nach oben betrachtet erkennt man $x_3 = 1$, $5x_2 = 18 - 8 \cdot 1 = 10$, also $x_2 = 2$ und $x_1 = 8 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$. Also ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

und damit $A\vec{x} = \vec{b}$.

Lösungsmenge: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 1)$

4.3 Die Determinante und Cramersche Regel

Die Cramersche Regel dient neben dem Gauß-Verfahren ebenfalls dem Lösen linearer Gleichungssysteme. Sie kann allerdings nur angewandt werden, sofern $m = n$, also A eine quadratische Matrix ist.

4.3.1 Die Leibnitz-Formel

Die Determinante einer $n \times n$-Matrix A, $n \in \mathbb{N}$, ist definiert als

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(b) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Diese Formel wird auch Leibnitz-Formel genannt, sie hat $n!$ Summanden. S_n ist die Menge aller Permutationen von $(1, \ldots, n)$. Das Vorzeichen $\operatorname{sgn}(\sigma)$ von $\sigma \in S_n$ berechnet sich durch

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{|\operatorname{inv}(\sigma)|} \in \{-1, 1\}$$

mit $|\operatorname{inv}(\sigma)| \in \mathbb{N}$ als die Anzahl der Elemente in $\operatorname{inv}(\sigma)$ und

$$\operatorname{inv}(\sigma) = \Big\{(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 : i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\Big\}.$$

4.3.2 Berechnung der Determinante

Für die Spezialfälle $n \in \{2, 3\}$ lässt sich die Leibnitz-Formel stark vereinfachen. Dies erleichtert die Berechnung der Determinante. Es gilt für $n = 2$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

In Abb. 4.1 sieht man, das für diese Formel eine Merkhilfe existiert: Man multipliziere zuerst die Hauptdiagonale (blau) und zieht anschließend das Produkt der Gegendiagonalen (grün) ab.

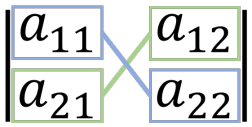


Abbildung 4.1

Für $n = 3$ gilt

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{11}a_{23}.$$

Auch hier existiert wieder eine Merkhilfe: Die drei Summanden mit positiven Vorzeichen (s. Abb. 4.2) ergeben sich jeweils aus dem Produkt der Hauptdiagonale (blau) und der beiden Nebendiagonalen der Hauptdiagonale zusammen mit dem jeweiligen gegenüberliegenden Punkt in der Ecke von A (orange und grün).

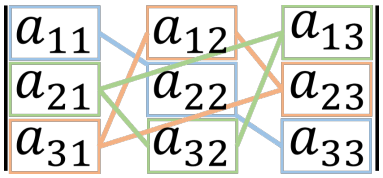


Abbildung 4.2

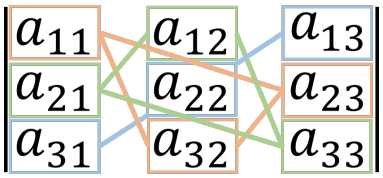


Abbildung 4.3

Die drei Summanden mit negativem Vorzeichen (s. Abb. 4.3) ergeben sich jeweils aus dem Produkt der Gegendiagonale (blau) und der beiden Nebendiagonalen der Gegendiagonale zusammen mit dem jeweiligen gegenüberliegenden Punkt in der Ecke von A (orange und grün).

4.3.3 Die Cramersche Regel

Die Cramersche Regel zur Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\det(A) \neq 0$ und $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ lautet nun

$$x_i = \frac{\det\left(A^{(i)}\right)}{\det(A)} \tag{4.4}$$

für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$, wobei in $A^{(i)}$ jede Spalte aus A mit Ausnahme der i-ten Spalte übernommen wird. In der i-ten Spalte von $A^{(i)}$ steht der Vektor $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Falls also $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$ die Spalten von A sind, das heißt

$$A = \left(\tilde{a}_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \tilde{a}_n\right)$$

ist, dann gilt

$$A^{(i)} = \left(\tilde{a}_1 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \tilde{a}_{i-1} \;\middle|\; \underset{\uparrow}{\vec{b}} \;\middle|\; \tilde{a}_{i+1} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \tilde{a}_n \right).$$

i-te Spalte

Die Voraussetzung $\det(A) \neq 0$ stellt sicher, dass die Lösungsmenge genau einen Punkt enthält, nämlich jener in (4.4).
Falls $\det(A) = 0$ ist, gibt es nur zwei Fälle:

a) $\exists i \in \{1 \ldots, n\} : \det(A^{(i)}) \neq 0 \Rightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ hat keine Lösung (leere Lösungsmenge)

b) $\forall i \in \{1 \ldots, n\} : \det(A^{(i)}) = \det(A) = 0 \Rightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ hat unendlich viele Lösungen

Aufgabe 4.2
Löse

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + ax_2 &= 2a \end{cases}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$.

Lösung 4.2
Wir finden

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a \end{pmatrix}$$

und können so

$$\det(A) = a^2 - 1 = (a-1)(a+1) \neq 0, \text{ falls } a \notin \{1, -1\}$$

berechnen. Zudem ist

$$\det(A^{(1)}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2a & a \end{vmatrix} = 2a - 2a = 0,$$

$$\det(A^{(2)}) = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 2a \end{vmatrix} = 2a^2 - 2.$$

Es treten zwei Fälle auf:

a) $a \notin \{-1, 1\}$
Durch die Cramersche Regel können wir explizit

$$x_1 = \frac{0}{a^2 - 1} = 0$$

und

$$x_2 = \frac{2a^2 - 2}{a^2 - 1} = 2$$

berechnen.

b) $a \in \{-1, 1\}$
Hier ist $\det(A) = \det(A^{(1)}) = \det(A^{(2)}) = 0$ und damit existieren unendlich viele Lösungen. Genauer gilt für $a = 1$

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + ax_2 &= 2a \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{cases} \iff x_2 = 2 - x_1$$

und für $a = -1$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + -x_2 &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 + x_2 &= 2 \end{cases} \iff x_2 = 2 + x_1.$$

Lösungsmenge:

a) $a \neq \pm 1 : (x_1, x_2) = (0, 2)$

b) $a = 1 : (x_1, x_2) \in \left\{(x, 2 - x) : x \in \mathbb{R}\right\}$

c) $a = -1 : (x_1, x_2) \in \left\{(x, 2 + x) : x \in \mathbb{R}\right\}$

Aufgabe 4.3
Löse das gegebene lineare Gleichungssystem aus Aufgabe 4.1 mithilfe der Cramerschen Regel.

Lösung 4.3

$$\det(A) = 2 + 4 + 9 - 6 - 12 - 1 = -4$$

$$\det(A^{(1)}) = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 - 4 \cdot 6 - 8 - 3 \cdot 6 = -4$$

$$\det(A^{(2)}) = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3 - 6 \cdot 8 - 6 = -8$$

$$\det(A^{(3)}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 8 - 2 \cdot 8 - 6 \cdot 6 - 6 \cdot 6 = -4$$

Mit der Cramerschen Regel folgt

$$x_1 = \frac{\det(A^{(1)})}{\det(A)} = 1$$
$$x_2 = \frac{\det(A^{(2)})}{\det(A)} = 2$$
$$x_3 = \frac{\det(A^{(3)})}{\det(A)} = 1.$$

Dies entspricht dem Ergebnis aus Aufgabe 4.1.

4.4 Methode der variablen Koeffizienten

Aufgabe 4.4

Es sei das System

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ 7x_1 + 3x_2 = -9 \end{cases}$$

gegeben. Finde den Wert von $5x + y - 2z$.

Lösung 4.4
Finde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned}
&\alpha(x_1 + x_2 + x_3) + \beta(7x_1 + 3x_2) = 5x_1 + x_2 - 2x_3 \\
\Rightarrow\ &(\alpha + 7\beta)x_1 + (\alpha + 3\beta)x_2 + \alpha x_3 = 5x_1 + x_2 - 2x_3 \\
\Rightarrow\ &\begin{cases} \alpha + 7\beta = 5 \\ \alpha + 3\beta = 1 \\ \alpha = -2 \end{cases} \\
\Rightarrow\ &\begin{cases} \beta = \frac{1-\alpha}{3} = \frac{3}{3} = 1 \\ \alpha = -2 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Diese Lösungsstrategie entspricht der Methode der variablen Koeffizienten. Damit folgt

$$5x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \cdot \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{=13} + 1 \cdot \underbrace{(7x_1 + 3x_2)}_{=-9} = -35.$$

Lösungswert: $5x + y - 2z = -35$

Aufgabe 4.5
Es sei das System

$$\begin{cases} (x - y)(x + y) = z^2 \\ 4y^2 = 5 + 7z^2 \end{cases} \tag{4.5}$$

gegeben. Finde den Wert von $2x^2 + 10y^2 - 23z^2$.

Lösung 4.5
Zunächst ist (4.5) äquivalent zum System

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ 4y^2 - 7z^2 = 5 \end{cases} .$$

Mittels der Methode der variablen Koeffizienten gilt

$$\begin{aligned}
&\alpha(x^2 - y^2 - z^2) + \beta(4y^2 - 7z^2) = 2x^2 + 10y^2 - 23z^2 \\
\Rightarrow\ &\alpha x^2 + (-\alpha + 4\beta)y^2 + (-\alpha - 7\beta)z^2 = 2x^2 + 10y^2 - 23z^2 \\
\Rightarrow\ &\begin{cases} \alpha = 2 \\ -\alpha + 4\beta = 10 \\ -\alpha - 7\beta = -23 \end{cases} \\
\Rightarrow\ &\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = \frac{12}{4} = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

und damit folgt

$$2x^2 + 10y^2 - 23z^2 = \alpha \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15.$$

Lösungswert: $2x^2 + 10y^2 - 23z^2 = 15$

Aufgabe 4.6

Es sei das System

$$\begin{cases} \frac{t}{x+2y+2z} = 1 \\ \frac{t}{z-3x} = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad t, x, y, z > 0 \tag{4.6}$$

gegeben. Finde den Wert von $L = \dfrac{t}{x + 8y + 9z}$.

Lösung 4.6

Es ist bequemer, den Wert von

$$\frac{1}{L} = \underbrace{\frac{x}{t}}_{a} + 8\,\underbrace{\frac{y}{t}}_{b} + 9\,\underbrace{\frac{z}{t}}_{c}$$

zu berechnen. Zudem ist (4.6) äquivalent zum System

$$\begin{cases} \frac{x}{t} + \frac{2y}{t} + \frac{2z}{t} = 1 \\ \frac{z}{t} - \frac{3x}{t} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b + 2c = 1 \\ -3a + c = 2 \end{cases}.$$

Gesucht ist also jetzt $a + 8b + 9c$. Mittels der Methode der variablen Koeffizienten gilt

$$\begin{aligned}
&\alpha(a + 2b + 2c) + \beta(-3a + c) = a + 8b + 9c \\
\Rightarrow\ &(\alpha - 3\beta)a + 2\alpha\beta + (2\alpha + \beta)c = a + 8b + 9c \\
\Rightarrow\ &\begin{cases} \alpha - 3\beta = 1 \\ 2\alpha = 8 \\ 2\alpha + \beta = 9 \end{cases} \\
\Rightarrow\ &\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

und damit folgt

$$L = \frac{1}{\frac{1}{L}} = \frac{1}{a + 8b + 9c} = \frac{1}{4 \cdot 1 + 1 \cdot 2} = \frac{1}{6}.$$

Lösungswert: $\dfrac{t}{x + 8y + 9z} = \dfrac{1}{6}$

4.5 Nicht-lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 4.7
Löse

$$\begin{cases} (x + y)^2 - z^2 = 4 \\ (y + z)^2 - x^2 = 2 \\ (x + z)^2 - y^2 = 3 \end{cases} . \tag{4.7}$$

Lösung 4.7
Summiere alle drei Gleichungen auf:

$$(x + y)^2 - z^2 + (y + z)^2 - x^2 + (x + z)^2 - y^2 = 4 + 2 + 3 = 9 \tag{4.8}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\\ &= x^2+2xy+y^2+y^2+2yz+z^2+z^2+2xz+x^2-x^2-y^2-z^2\\ &= (x+y)^2-z^2+(y+z)^2-x^2+(x+z)^2-y^2.\end{aligned}$$

Also ist (4.8) äquivalent zu

$$(x+y+z)^2 = 9 \Longleftrightarrow (x+y+z) = \pm 3.$$

Schreibe nun (4.7) in ein lineares Gleichungssystem um und wende die Gauß-Methode an:

$$\begin{aligned}(4.7) &\Longleftrightarrow \begin{cases}(x+y+z)(x+y-z)=4\\(x+y+z)(y+z-x)=2\\(x+y+z)(x+z-y)=3\end{cases}\\ &\Longrightarrow \begin{cases}3(x+y-z)=4\\3(y+z-x)=2\\3(x+z-y)=3\end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases}-3(x+y-z)=4\\-3(y+z-x)=2\\-3(x+z-y)=3\end{cases}\\ &\Longrightarrow \begin{cases}x+y-z=\frac{4}{3}\\y+z-x=\frac{2}{3}\\x+z-y=1\end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases}x+y-z=-\frac{4}{3}\\y+z-x=-\frac{2}{3}\\x+z-y=-1\end{cases}\\ &\overset{\text{Gauß}}{\Longrightarrow} \begin{cases}x=\frac{7}{6}\\y=1\\z=\frac{5}{6}\end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases}x=-\frac{7}{6}\\y=-1\\z=-\frac{5}{6}\end{cases}\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $(x,y,z) \in \left\{\left(\frac{7}{6},1,\frac{5}{6}\right),\left(-\frac{7}{6},-1,-\frac{5}{6}\right)\right\}$

Aufgabe 4.8

Löse

$$\begin{cases}x^2+y^2-x-y=102\\xy+x+y=69\end{cases}. \tag{4.9}$$

Lösung 4.8

Da x und y symmetrisch in das Gleichungssystem eingehen (Addition und Multiplikation sind in $\mathbb{R}$ kommutativ), gilt:

$$(x_0, y_0) \text{ löst } (4.9) \iff (y_0, x_0) \text{ löst } (4.9)$$

Substituiere $a = x + y$ und $b = xy$. Dann ist $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b$ und (mithilfe der Mitternachtsformel)

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} a^2 - 2b - a = 102 \\ a + b = 69 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} a^2 - 2(69 - a) - a = 102 \\ b = 69 - a \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} a^2 + a - 240 = 0 \\ b = 69 - a \end{cases} \\
\implies &\begin{cases} a = -16 \\ b = 85 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} a = 15 \\ b = 54 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Löse also (Rücksubstitution) die beiden neuen Gleichungssysteme

$$\begin{cases} x + y = -16 \\ xy = 85 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -16 - x \\ -x(x + 16) - 85 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -16 - x \\ x^2 + 16x + 85 = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

und

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ xy = 54 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 15 - x \\ x(15 - x) - 54 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 15 - x \\ x^2 - 15x + 54 = 0 \end{cases} . \tag{4.11}$$

In (4.10) hat die Diskriminante den Wert $16^2 - 4 \cdot 85 = 256 - 340 < 0$, das heißt hier existiert keine Lösung. Für (4.11) gilt

$$x_\pm = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 54}}{2 \cdot 1} = \frac{15 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{15 \pm 3}{2} = \begin{cases} 9 \\ 6 \end{cases} .$$

Insgesamt folgt also

$$
\begin{aligned}
(4.9) &\iff \begin{cases} y = 15 - x \\ x^2 - 15x + 54 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = 15 - x \\ (x-9)(x-6) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 6 \\ y = 15 - 6 = 9 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x = 9 \\ b = 15 - 9 = 6 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Beachte, dass dieses Ergebnis mit der vorhin beschriebenen Symmetrie des Gleichungssystems überstimmt.

Lösungsmenge: $(x, y) \in \Big\{(6, 9), (9, 6)\Big\}$

4.6 Übungsaufgaben

4.6.1 Aufgaben für das Gauß-Verfahren und die Cramersche Regel

Löse die folgenden Gleichungssysteme.

Aufgabe 4.9

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 12 \\ 2x - y + z & = -1 \\ 3x + 7y - 2z & = 5 \end{cases}$$

Aufgabe 4.10
Löse für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax + y & = 1 \\ 2x + (a+1)y & = 2 \end{cases}$$

Aufgabe 4.11
Löse für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2(a-1)x - 2y & = a - 1 \\ 4x + (1-a)y & = 2 \end{cases}$$

Aufgabe 4.12

$$\begin{cases} 2x + y + z & = 7 \\ x + 2y + z & = 8 \\ x + y + 2z & = 9 \end{cases}$$

Aufgabe 4.13

$$\begin{cases} x + y + z & = 4 \\ -2x - y + 3z & = 1 \\ 2x + 3y - z & = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 4.14

$$\begin{cases} x + 2y + z + 7 & = 0 \\ 2x + y - z - 1 & = 0 \\ 3x - y + 2z - 2 & = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4.15
Löse für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + a^2 y + b^2 z & = 0 \\ x + ay + bz & = 0 \\ x + y + z & = 1 \end{cases}$$

4.6.2 Variable Koeffizienten und die Cramersche Regel

Aufgabe 4.16
Es sei bekannt, dass

$$\begin{cases} 5v + 5(w - v) & = s \\ \dfrac{s}{w - v} + \dfrac{s}{w + v} & = \dfrac{s}{v} \end{cases}$$

für $v, w, s > 0$. Stimmt es, dass

$$\frac{s}{v} \leq 12$$

ist?

Aufgabe 4.17
Es sei bekannt, dass

$$\begin{cases} \dfrac{p}{x+y+z} & = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{2p}{x+2y-t} & = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{p}{2x-y-z+t} & = 1. \end{cases}$$

Finde $\dfrac{7x-4z+t}{p}$.

Aufgabe 4.18
Es sei bekannt, dass

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x+2y+3z} & = 2 \\ \dfrac{a}{-x+3y-z} & = 3. \end{cases}$$

Finde $\dfrac{a}{18y-x+5z}$.

Löse die folgenden Gleichungssysteme in Abhängigkeit der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4.19

$$\begin{cases} x+ay-1 & = 0 \\ ax-3ay-(2a+3) & = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4.20

$$\begin{cases} (a^2+b^2)x+(a^2-b^2)y & = a^2 \\ (a+b)x+(a-b)y & = a \end{cases}$$

Aufgabe 4.21
Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2+b^2+c^2 = 1$ hat folgendes Gleichungssystem mindestens eine

Lösung?

$$\begin{cases} x + ay &= b + c \\ x + by &= c + a \\ x + cy &= a + b \end{cases}$$

Aufgabe 4.22
Für welche Parameterwerte a und b besitzt das folgende Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?

$$\begin{cases} a^2x - by &= a^2 - b \\ bx - b^2y &= 2 + 4b \end{cases}$$

Aufgabe 4.23
Für welche Parameterwerte $a \in \mathbb{R}$ besitzt das folgende Gleichungssystem keine Lösungen?

$$\begin{cases} a^2x + (2 - a)y &= 4 + a^3 \\ ax + (2a - 1)y &= a^5 - 2 \end{cases}$$

4.6.3 Nichtlineare Gleichungssysteme

Löse die folgenden Gleichungssysteme.

Aufgabe 4.24

$$\begin{cases} \dfrac{3xy}{x + y} &= \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{x + z}{xz} &= \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{y + z}{yz} &= \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Aufgabe 4.25

$$\begin{cases} x + y + z & = 4 \\ 2xy - z^2 & = 16 \end{cases}$$

Aufgabe 4.26

$$\begin{cases} x + y + xy & = 7 \\ x^2 + y^2 + xy & = 13 \end{cases}$$

Aufgabe 4.27

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z & = 2 \\ x^2 + y + z^2 & = 2 \\ x + y^2 + z^2 & = 2 \end{cases}$$

Aufgabe 4.28

$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) & = 10 \\ (x + y)(x - y) & = 3 \end{cases}$$

Aufgabe 4.29

$$\begin{cases} \dfrac{2}{2x - y} + \dfrac{3}{x - 2y} & = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{2x - y} - \dfrac{1}{x - 2y} & = \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

Aufgabe 4.30

$$\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} & = 1 \\ 5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + 2y & = 2 \end{cases}$$

Aufgabe 4.31

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 & = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 & = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4.32

$$\begin{cases} \log_4(x) - \log_2(y) & = 0 \\ x^2 - 2y^2 - 8 & = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4.33

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} & = 32 \\ \log_3(x-y) & = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$$

Aufgabe 4.34

$$\begin{cases} \left(0.48^{x^2+2}\right)^{2x-y} & = 1 \\ \log_{10}(x+y) - 1 & = \log_{10}(6) - \log_{10}(x+2y) \end{cases}$$

Aufgabe 4.35

$$\begin{cases} x^{x^2-y^2-16} & = 1 \\ x - y & = 2 \end{cases}$$

5 Analytische Geometrie

Bei der Lösung von geometrischen Problemen in $2D$ und $3D$ kann es in der Schulmathematik manchmal von entscheidendem Vorteil sein, ein Koordinatensystem geschickt einzuführen und das Problem in die Sprache der Vektoralgebra umzuformulieren. Dabei steht die komplette Maschinerie der Vektoralgebra zur Verfügung (siehe Formelsammlung). Im Folgenden werden einige solche Probleme mit einer Lösungsstrategie beschrieben.

5.1 Probleme auf der Ebene

Aufgabe 5.1
In einem Dreieck ABC werden Punkte A_1, B_1 und C_1 auf Seiten AB, BC und CA gesetzt, sodass

$$\frac{|AA_1|}{|AB|} = \frac{|BB_1|}{|BC|} = \frac{|CC_1|}{|AC|}.$$

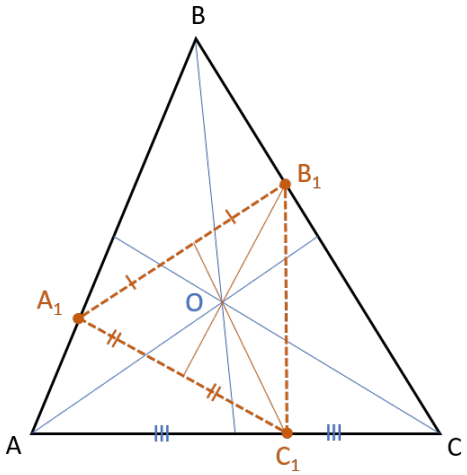


Abbildung 5.1

Zeige, dass die Schnittpunkte der Seitenhalbierenden in den Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ zusammenfallen (s. Abb. 5.1).

Lösung 5.1
Seien $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Wenn AM die Seitenhalbierende in ΔABC ist, so gilt $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Es ist bekannt, dass sich alle Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt D im Verhältnis $2:1$ schneiden (von den Ecken ausgehend). Sei O der Schnittpunkt aller Seitenhalbierenden in ΔABC (s. Abb. 5.2).

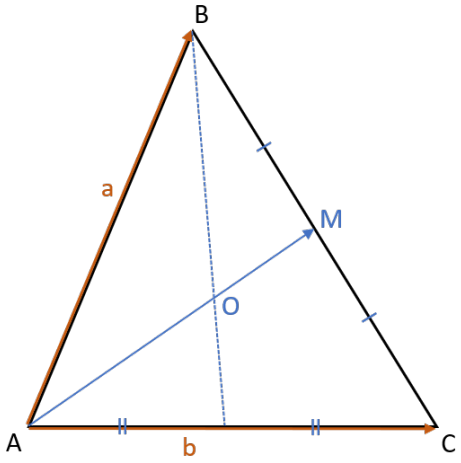


Abbildung 5.2

Dann gilt

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Sei $m = \dfrac{|AA_1|}{|AB|}$ im Dreieck $\Delta A_1B_1C_1$. Dann gilt

$$\overrightarrow{A_1C_1} = (1-m)\,\vec{b} - m\,\vec{a} \qquad \text{und}$$
$$\overrightarrow{A_1B_1} = (1-m)\,\vec{a} + m(\vec{b} - \vec{a}).$$

Sei A_1M_1 die Seitenhalbierende in $\Delta A_1B_1C_1$. Dann gilt

$$\overrightarrow{A_1M_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + (1-3m)\,\vec{a}).$$

Sei O_1 der Schnittpunkt aller Seitenhalbierenden in $\Delta A_1B_1C_1$ (s. Abb. 5.3). O_1 liegt auf A_1M_1 so, dass $|A_1O_1| = \frac{2}{3}|A_1M_1|$, also $\overrightarrow{A_1O_1} = \frac{1}{3}(\vec{b} + (1-3m)\,\vec{a})$.

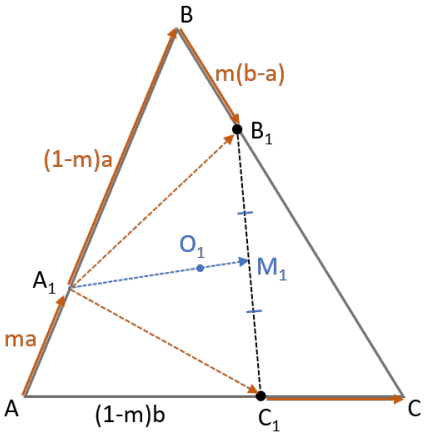


Abbildung 5.3

Bestimme den Vektor $\overrightarrow{AO_1}$:

$$\overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1O_1} = m\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + (1-3m)\vec{a}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Da $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO_1} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$ gilt, schließen wir $O = O_1$, was der Behauptung entspricht.

Aufgabe 5.2

Die Endpunkte eines Liniensystems mit Länge a gleiten auf den Seiten eines rechten Winkels. Welche Linie durchstreicht die Mitte dieses Systems?

Lösung 5.2

Platziere den Koordinatenursprung an der Ecke des rechten Winkels (s. Abb. 5.4). Dabei seien die Koordinatenachsen identisch mit den Seitenachsen des rechten Winkels. Sei M mit Koordinaten (x, y) die Mitte der Strecke AB der Länge a. Offensichtlich sind $x, y \geq 0$. Es ist leicht ersichtlich, dass $A = (2x, 0)$ und $B = (0, 2y)$ ist.

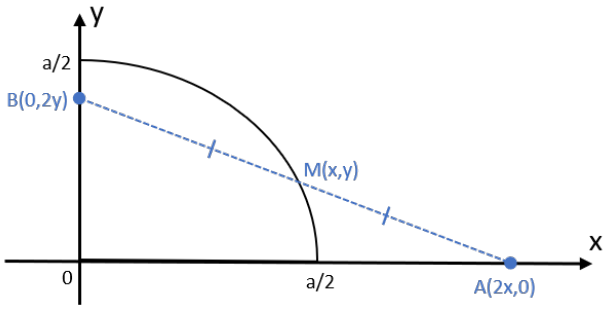


Abbildung 5.4

Nach dem Satz des Pythagoras gilt in ΔAOB nämlich $|AB|^2 = (2x)^2 + (2y)^2$, woraus mit

$|AB| = a$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

folgt. Das ist eine Gleichung des Kreissegmentes eines Kreises mit Zentrum in O und Radius $\frac{a}{2}$ im ersten Quadranten $x, y \geq 0$.
Zeige umgekehrt, dass alle Punkte $M = (x, y)$ auf der Kurve $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ mit $x, y \geq 0$ die Mitte einer Strecke AB mit $A \in OX$ und $B \in OY$ sind. Falls $M = (x, y)$ ist, wählen wir $A = (2x, 0)$ und $B = (0, 2y)$. Nach dem Satz des Pythagoras ist $|AB| = a$. Nun ist alles bewiesen.

Aufgabe 5.3
Sei $ABCDEF$ ein beliebiges 6-Eck und seien U, V, W, X, Y, Z seine Seitenmitten. Zeige, dass die Zentren der Schwerkraft der Dreiecke UWY und VXZ übereinstimmen.

Lösung 5.3
Aus der Physik ist bekannt, dass sich das Zentrum M der Schwerkraft eines Systems bestehend aus drei in einem Dreieck $G_1G_2G_3$ angeordneten Einheitsmassen durch

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{OG_3}\right).$$

bestimmen lässt. Dabei ist O ein beliebiger Punkt, zum Beispiel der Koordinatenursprung (s. Abb. 5.5).

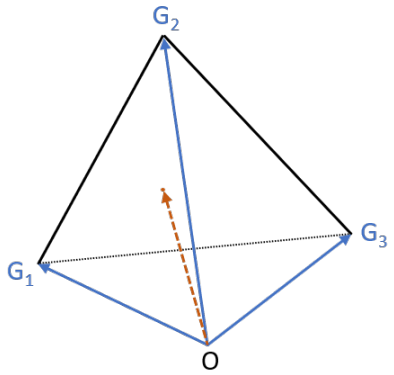


Abbildung 5.5

Da die Punkte U, V, W, X, Y und Z jeweils Seitenmitten sind, folgt

$$\overrightarrow{OU} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \qquad \overrightarrow{OV} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \qquad \overrightarrow{OW} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$$
$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}\right) \qquad \overrightarrow{OY} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) \qquad \overrightarrow{OZ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OA}\right).$$

Dabei ist O wieder ein beliebiger Punkt. Seien M und N jeweils die Zentren der Schwerkraft von ΔUWY und ΔVXZ (s. Abb. 5.6).

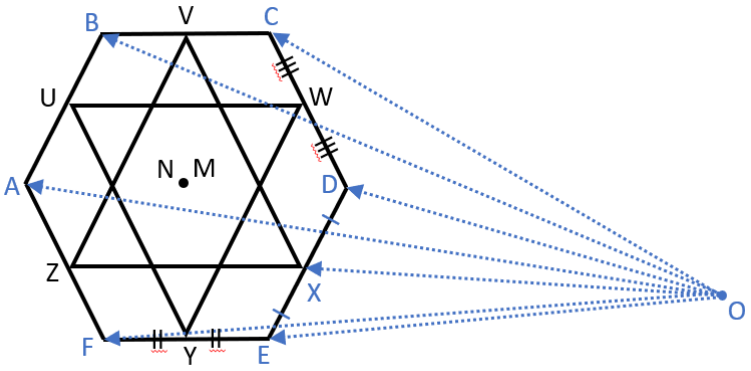


Abbildung 5.6

Nach obiger Formel gilt

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OW} + \overrightarrow{OY}\right) = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right)$$

und

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OV} + \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OZ}\right) = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right).$$

Daraus folgt $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$ und damit $M = N$, was der Behauptung entspricht.

5.2 Probleme im dreidimensionalen Raum

Aufgabe 5.4

In einem Tetraeder $ABCD$ gelte $|AB| = |BC|$ und $|AD| = |DC|$. Zeige, dass $AC \perp BD$.

Lösung 5.4

Wähle drei nicht-komplanare (nicht in einer Ebene liegende) Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{BD}$ als Basis des Raumes $\mathbb{R}^3$. In dieser Basis gilt $\overrightarrow{DC} = \vec{a} - \vec{c}$ und $\overrightarrow{DA} = \vec{b} - \vec{c}$. Per Annahme gilt $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ und $|\vec{a} - \vec{c}| = |\vec{b} - \vec{c}|$ (s. Abb. 5.7).

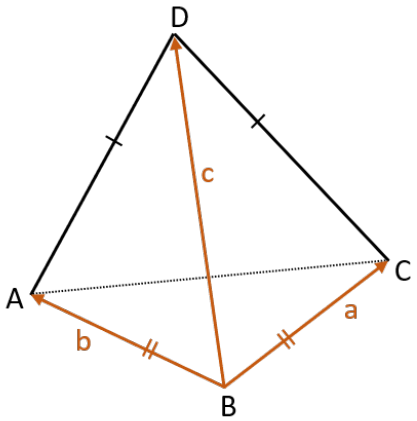


Abbildung 5.7

Daraus folgt

$$|\vec{a} - \vec{c}|^2 = \langle \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} - \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle = |\vec{a}|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + |\vec{c}|^2$$

und

$$|\vec{b} - \vec{c}|^2 = \langle \vec{b} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c} \rangle = \underbrace{|\vec{b}|^2}_{=|\vec{a}|^2} - 2\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + |\vec{c}|^2.$$

sowie nach Gleichsetzen der beiden Terme

$$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \Leftrightarrow \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} \perp \vec{c}.$$

Da $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{BD}$ ist, folgt $AC \perp BD$, also die Behauptung.

Aufgabe 5.5

Es sei ein Einheitswürfel gegeben. Zeige, dass die Summe S der Quadrate aller Projektionslängen seiner Kanten mit einer beliebigen Gerade nicht von der Wahl dieser Gerade abhängt, und bestimme S.

Lösung 5.5

Sei unser Würfel $ABCDA_1B_1C_1D_1$ mit den Koordinaten

$$A = (0,0,0) \qquad B = (1,0,0) \qquad C = (0,1,0) \qquad D = (1,1,0)$$
$$A_1 = (0,0,1) \qquad B_1 = (1,0,1) \qquad C_1 = (0,1,1) \qquad D_1 = (1,1,1)$$

gegeben. Die Länge einer Projektion einer Strecke Π auf eine Gerade ℓ ist

$$|\Pi| \cos\Big(\underbrace{\widehat{(\Pi, \ell)}}_{=\alpha} \Big) = |\Pi| \cos(\alpha).$$

Diese Größe ändert sich nicht bei paralleler Translation von ℓ (s. Abb. 5.8). Daher hängt unsere Summe S nicht von einer Verschiebung der Geraden ab. Demnach dürfen wir also genau die Gerade wählen, die durch den Koordinatenursprung $O = A$ geht.

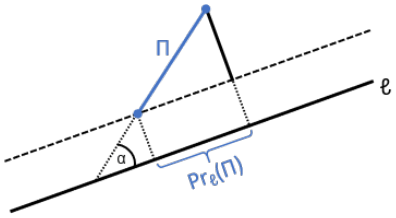


Abbildung 5.8

Die Projektionslängen der gleichen und parallelen Kanten

$$AB, CD, A_1B_1, C_1D_1$$
$$AC, BD, A_1C_1, B_1D_1$$
$$AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$$

sind in jeder dieser drei Vierer-Serien gleich. Daher gilt

$$S = 4\left[\left| Pr_\ell(AB) \right|^2 + \left| Pr_\ell(AC) \right|^2 + \left| Pr_\ell(AA_1) \right|^2 \right]$$

mit $Pr_\ell(\Pi)$ als die Projektion von Π auf ℓ. Wähle einen Punkt L auf der Geraden ℓ so, dass $|AL| = 1$ ist.
Sei $\vec{p} = \overrightarrow{AL} = (x, y, z)$, $\vec{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{e_3} = \overrightarrow{AA_1}$. Sei zudem $\varphi_i = \widehat{(\vec{p}, \vec{e_i})}$ für $i = 1, 2, 3$. Dann gilt

$$\cos(\varphi_i) = \langle \vec{p}, \vec{e_i} \rangle.$$

Da aber $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ gerade die Einheitsvektoren unseres Koordinatensystems sind (s. Abb.

5.9), können wir

$$\langle \vec{p}, \vec{e_1} \rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0 = x$$
$$\langle \vec{p}, \vec{e_2} \rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1 + z \cdot 0 = y$$
$$\langle \vec{p}, \vec{e_3} \rangle = x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 1 = z$$

schließen.

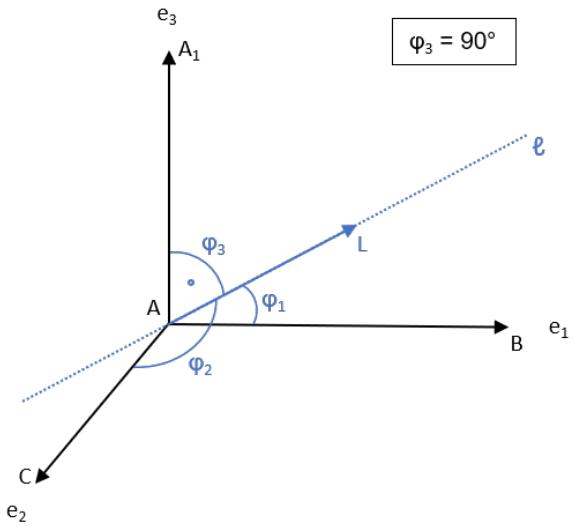


Abbildung 5.9

Andererseits ist $\cos(\varphi_i)$ gerade die Länge von $Pr_\ell(\vec{e_i})$, denn $|\vec{e_i}| = 1$ für alle $i = 1, 2, 3$. Da $|\vec{p}| = 1$ ist, gilt

$$S = 4\Big[\cos^2(\varphi_1) + \cos^2(\varphi_2) + \cos^2(\varphi_3)\Big] = 4\underbrace{\Big[x^2 + y^2 + z^2\Big]}_{=|\vec{p}|^2=1} = 4 \cdot 1 = 4.$$

Also ist $S = 4$.

Aufgabe 5.6

In einem Quader $ABCDA_1B_1C_1D_1$ mit quadratischer Basis $ABCD$ gelte $|AA_1| : |AB| = 2$. Bestimme den Winkel zwischen der Diagonalen BD_1 und der Ebene BC_1D.

Lösung 5.6

Führe das Koordinatensystem so ein, dass D im Koordinatenursprung liegt (s. Abb. 5.10). Sei $s = |AB|$. Dann gilt $|AA_1| = 2s$.

Daraus folgt:

$$B = (s, s, 0) \qquad C_1 = (0, s, 2s)$$
$$D = (0, 0, 0) \qquad D_1 = (0, 0, 2s)$$

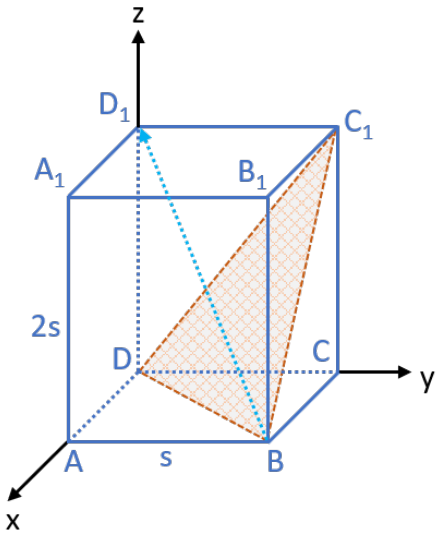


Abbildung 5.10

Schreibe die Gleichung der Ebene BC_1D als $ax + by + cz = 0$ und bestimme a, b und c. Da $s \neq 0$, folgen diese beiden Bedingungen:

$$B \in BC_1D \implies as + bs = 0 \implies a + b = 0$$
$$C_1 \in BC_1D \implies bs + 2cs = 0 \implies b + 2c = 0$$

Daraus folgt $a = 2c$ und $b = -2c$. Da $c \neq 0$ (sonst wäre die Gleichung der Ebene ausgeartet), können wir $2cx - 2cy + cz = 0$ um c kürzen. Demnach ist $a = 2$, $b = -2$ und die Gleichung der Ebene lautet $2x - 2y + z = 0$. Ihr Normalenvektor $\vec{n}$ hat also die Koordinaten $\vec{n} = (2, -2, 1)$. Berechne die Koordinaten (p, q, r) von $\vec{\ell} = \overrightarrow{BD_1}$:

$$p = 0 - s = -s$$
$$q = 0 - s = -s$$
$$r = 2s - 0 = 2s$$

Also ist $\vec{\ell} = (-s, -s, 2s)$. Sei $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{BD_1}, BC_1D})$. Mit Formel (5.18) aus der Formelsamm-

lung gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{|\langle \vec{\ell}, \vec{n} \rangle|}{|\vec{\ell}| \cdot |\vec{n}|}$$

und

$$\begin{aligned} |\langle \vec{\ell}, \vec{n} \rangle| &= |-s \cdot 2 - s(-2) + 2s \cdot 1| = |2s| = 2s \\ |\vec{n}| &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3 \\ |\vec{\ell}| &= \sqrt{s^2 + s^2 + 4s^2} = \sqrt{6}s. \end{aligned}$$

Demnach ist $\sin(\alpha) = \frac{2s}{3\sqrt{6}s} = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$, woraus

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)$$

folgt.

Aufgabe 5.7

In einem Tetraeder $SABC$ wird eine Ebene durch die Ecke A, durch den Punkt E und den Punkt D so konstruiert, dass E die Mitte der Seitenhalbierenden SK in ΔSAB ist und D auf der Seitenhalbierenden in ΔSAC mit $2 \cdot |SD| = |DL|$ liegt (s. Abb. 5.11). In welchem Verhältnis teilt diese Ebene das Volumen des Tetraeders?

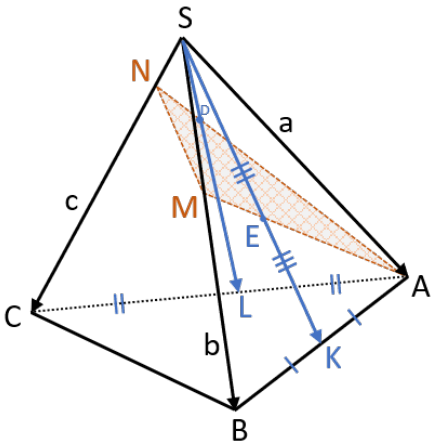


Abbildung 5.11

Um dieses Problem lösen zu können, werden die beiden folgende Fakten aus der Stereometrie benötigt.

Lemma 5.1 (ohne Beweis)
Sei $ABCD$ ein Tetraeder mit Volumen V. Auf den Kanten DA, DB und DC seien Punkte M, N und P so gewählt, dass sie diese Kanten in die Verhältnisse

$$|DM| = k_1 \cdot |DA|$$
$$|DN| = k_2 \cdot |DB|$$
$$|DP| = k_3 \cdot |DC|$$

teilen (s. Abb. 5.12).

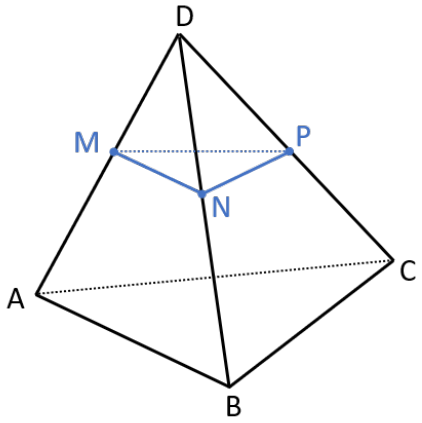


Abbildung 5.12

Dann lässt sich das Volumen $\tilde{V}$ des Tetraeders $MNPD$ durch

$$\tilde{V} = k_1 k_2 k_3 \cdot V$$

berechnen.

Lemma 5.2
Seien A, B, C, D Punkte auf einer Ebene E in allgemeiner Lage und O ein beliebiger Punkt im $\mathbb{R}^3$. Dann existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\overrightarrow{OD} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \beta) \cdot \overrightarrow{OC}$$

gilt (s. Abb. 5.13).

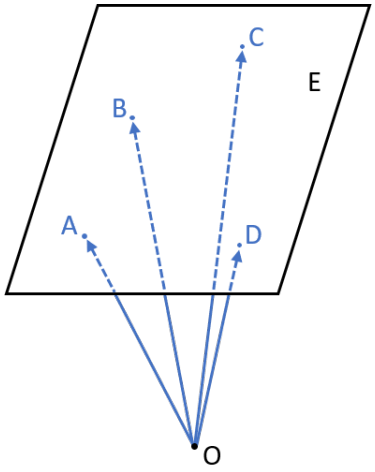


Abbildung 5.13

Beweis:
Die Existenz der beiden Koeffizienten α und β lässt sich folgendermaßen erklären:
Da die Linearkombinationen aus den beiden Vektoren $\overrightarrow{DA}$ und $\overrightarrow{CB}$ bereits die komplette Ebene E aufspannen, lässt sich auch der Vektor $\overrightarrow{CD} \in E$ als eine solche Linearkombination schreiben. Es existieren also jene Koeffizienten α und β, sodass

$$\overrightarrow{CD} = \alpha \cdot \overrightarrow{CA} + \beta \cdot \overrightarrow{CB} = \alpha \cdot \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right) + \beta \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right) = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB} + (-\alpha - \beta) \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Falls noch $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ in diese Gleichung eingesetzt wird, erhalten wir die entsprechende Formel für $\overrightarrow{OD}$. □

Lösung 5.7
Wir wählen den Punkt S als den Koordinatenursprung und die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{SC}$ als die Koordinatenvektoren. Durch Lemma 6.1 lassen sich die Gleichungen

$$k_1 = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$$
$$\overrightarrow{SM} = k_2 \vec{b}$$
$$\overrightarrow{SN} = k_3 \vec{c}$$

folgern. Finde k_2 und k_3. Per Definition der Seitenhalbierenden gilt zunächst

$$\overrightarrow{SE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SK} = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{SD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} = \frac{1}{6}\left(\vec{a} + \vec{c}\right).$$

Mit Lemma 6.2 schließen wir

$$k_2 \cdot \vec{b} = \overrightarrow{SM} = \alpha \cdot \underbrace{\vec{a}}_{\overrightarrow{SA}} + \underbrace{\frac{\beta}{4} \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)}_{\overrightarrow{SE}} + \underbrace{\frac{(1-\alpha-\beta)}{6} \cdot \left(\vec{a} + \vec{c}\right)}_{\overrightarrow{SD}} =$$
$$\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\alpha + \frac{1}{12}\beta\right) \cdot \vec{a} + \frac{\beta}{4} \cdot \vec{b} + \frac{1-\alpha-\beta}{6} \cdot \vec{c}.$$

Da die Entwicklung des Vektors $\overrightarrow{SM}$ als Linearkombination aus den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eindeutig ist, folgern wir die Bedingungen

$$\begin{cases} \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\alpha + \frac{\beta}{12} = 0 \\ k_2 = \frac{\beta}{4} \\ \frac{1-\alpha-\beta}{6} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ \frac{1}{6} + \frac{5}{6}(1-\beta) + \frac{\beta}{12} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \beta \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{12}\right) = 1$$

und daraus

$$\beta = \frac{4}{3} \qquad \text{sowie} \qquad k_2 = \frac{\beta}{4} = \frac{1}{3}.$$

Analog können wir durch

$$k_3 \cdot \vec{c} = \overrightarrow{SN} = \left(\frac{5}{6}\alpha + \frac{\beta}{12} + \frac{1}{6}\right) \cdot \vec{a} + \frac{\beta}{4} \cdot \vec{b} + \frac{1-\alpha-\beta}{6} \cdot \vec{c}$$

$k_3 = \frac{1}{5}$ finden. Daraus schließen wir das Volumen von $SAMN$

$$V_{SAMN} = k_1 k_2 k_3 \cdot V_{SABC} = \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot V_{SABC} = \frac{V_{SABC}}{15}$$

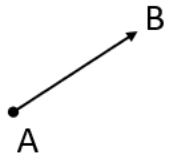
sowie das Volumenverhältnis

$$\frac{\frac{1}{15} \cdot V_{SABC}}{\frac{14}{15} \cdot V_{SABC}} = \frac{1}{14}.$$

Also teilt die Ebene das Volumen des Tetraeders in einem Verhältnis von $1 : 14$.

5.3 Formelsammlung

- Vektor $\overrightarrow{AB}$ mit Anfangspunkt $A = (a_1, \ldots, a_n)$ und Endpunkt $B = (b_1, \ldots, a_n)$ mit $n = 2, 3, \ldots$:

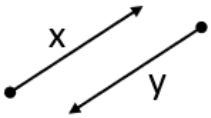


$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$$

- Länge von $\overrightarrow{AB}$ mit $A = (a_1, \ldots, a_n)$ und $B = (b_1, \ldots, b_n)$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)^2} \tag{5.1}$$

- Vektoren $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ sind kollinear, falls ein $\lambda \neq 0$ existiert mit



$$y_j = \lambda x_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

- Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ und $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ sind kollinear, falls

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

- Skalarprodukt von $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$:

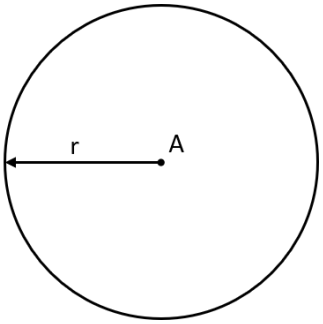
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \tag{5.2}$$

- Kosinus des Winkels $\alpha = \widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$ zwischen den Vektoren $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \tag{5.3}$$

- $|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$ (5.4)

- Gleichung einer Sphäre im $\mathbb{R}^n$ mit Zentrum $A = (a_1, \ldots, a_n)$ und Radius $r > 0$:



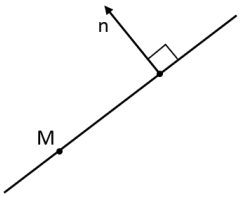
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 = r^2 \qquad (5.5)$$

- Gleichungen von Geraden im $\mathbb{R}^2$:

  (1) Kanonische Darstellung:

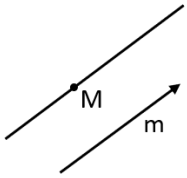
$$ax + by + c = 0 \qquad (5.6)$$

  (2) Gerade durch den Punkt $M = (x_0, y_0)$, orthogonal zum Vektor $\vec{n} = (a, b)$:



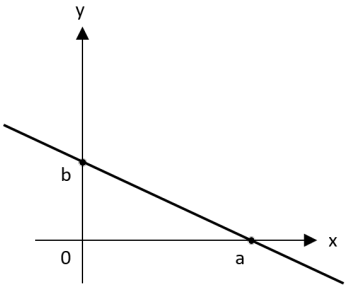
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad (5.7)$$

  (3) Gerade durch den Punkt $M = (x_0, y_0)$, parallel zum Vektor $\vec{m} = (c, d)$:



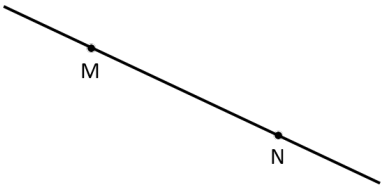
$$\frac{x - x_0}{c} = \frac{y - y_0}{d} \qquad (5.8)$$

  (4) Gerade durch Punkte $M = (a, 0)$ und $N = (0, b)$:



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (5.9)$$

  (5) Gerade durch Punkte $M = (x_0, y_0)$ und $N = (x_1, y_1)$:

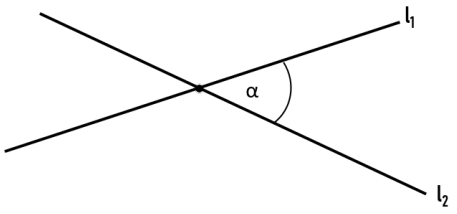


$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \qquad (5.10)$$

(6) Gerade mit Steigung k durch den Punkt $M = (x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{5.11}$$

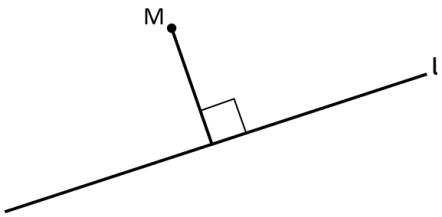
- Tangens des Winkels α zwischen Geraden $l_1 : y = k_1 x + c_1$ und $l_2 : y = k_2 x + c_2$:



$$\tan(\alpha) = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|, \text{ falls } k_1 k_2 \neq -1 \tag{5.12}$$

Falls $l_1 \perp l_2$, ist $k_1 k_2 \neq -1$.
Falls $l_1 \parallel l_2$, ist $k_1 = k_2$.

- Abstand vom Punkt $M = (x_0, y_0)$ zur Geraden $l : ax + by + c = 0$:



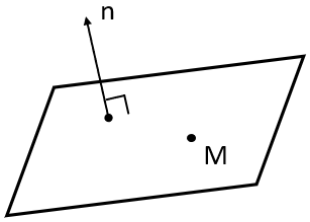
$$d(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{5.13}$$

- Gleichungen von Ebenen im $\mathbb{R}^3$:

(1) Kanonische Darstellung:

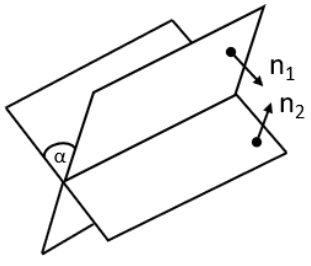
$$ax + by + cz + d = 0 \tag{5.14}$$

(2) Ebene durch den Punkt $M = (x_0, y_0, z_0)$, orthogonal zum Vektor $\vec{n} = (a, b, c)$:



$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{5.15}$$

- Kosinus des Winkels α zwischen Ebenen mit Normalen $\vec{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ und $\vec{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$:

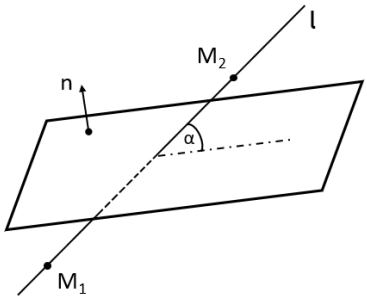


$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{n_1}, \vec{n_2} \rangle}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} \tag{5.16}$$

- Vektor $\vec{c}$, der kollinear zur Winkelhalbierenden zwischen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist:

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \tag{5.17}$$

- Sinus des Winkels α zwischen einer Geraden l, die durch die Punkte $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ geht, und einer Ebene E mit der Gleichung $ax + by + cz + d = 0$ und Normalenvektor $\vec{n} = (a, b, c)$:

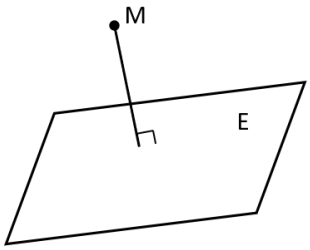


$$\sin(\alpha) = \frac{\langle \vec{n}, \overrightarrow{M_1M_2} \rangle}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M_1M_2}|} \tag{5.18}$$

mit

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \tag{5.19}$$

- Abstand vom Punkt $M = (x_0, y_0, z_0)$ zur Ebene E mit der Gleichung $ax + by + cz + d = 0$:



$$d(M, E) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{5.20}$$

5.4 Übungsaufgaben

5.4.1 Probleme auf der Ebene

Aufgabe 5.8
Für Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gelte $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$. Zeige, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Aufgabe 5.9
Zeige, dass in einem Dreieck ABC mit Seiten a, b, c die Seitenhalbierenden m_a und m_b genau dann orthogonal sind, wenn $a^2 + b^2 = 5c^2$.

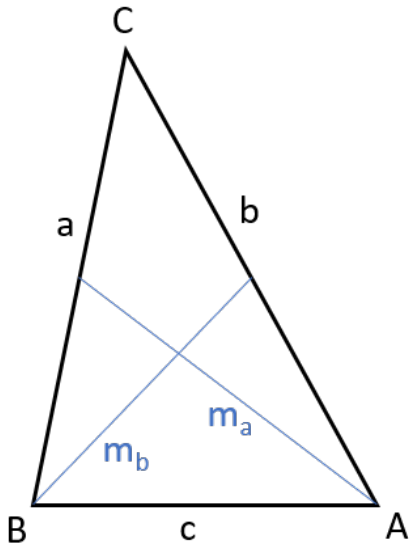


Abbildung 5.14

Aufgabe 5.10
Beweise den Satz von Menelaos:
Eine Gerade l schneide das Dreieck ABC. Dabei ist

- der Punkt C_1 ein Schnittpunkt von l mit der Seite AB,
- der Punkt A_1 ein Schnittpunkt von l mit der Seite BC und
- der Punkt B_1 ein Schnittpunkt von l mit der Verlängerung der Seite AC.

Dann gilt

$$\frac{|AC|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1. \tag{5.21}$$

Und umgekehrt, falls Punkte A_1, B_1 und C_1 auf den Seiten BC und AB sowie (der Verlängerung von) AC so in einem Dreieck ABC liegen, dass (5.21) gilt, so liegen A_1, B_1 und C_1 auf einer Geraden.

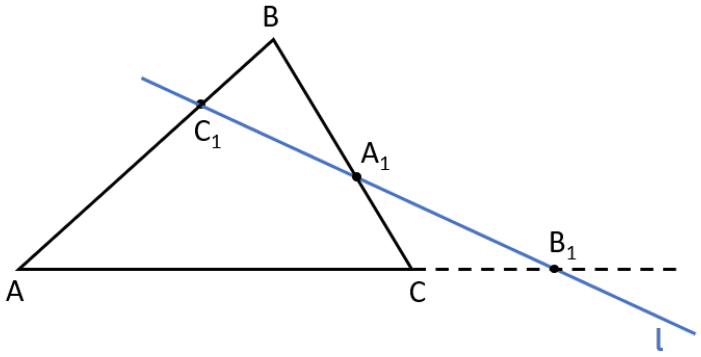


Abbildung 5.15

Aufgabe 5.11

Es sei ein Kreis K_1 mit Radius R_1 gegeben. Auf einem seiner Diameter AD wird ein weiterer Kreis K_2 mit Zentrum in A und Radius R_2 so konstruiert, dass $K_1 \cap K_2 = \{B\}$ und $K_2 \cap AD = \{C\}$ ist. Welches R_2 maximiert die Länge der Strecke BC?

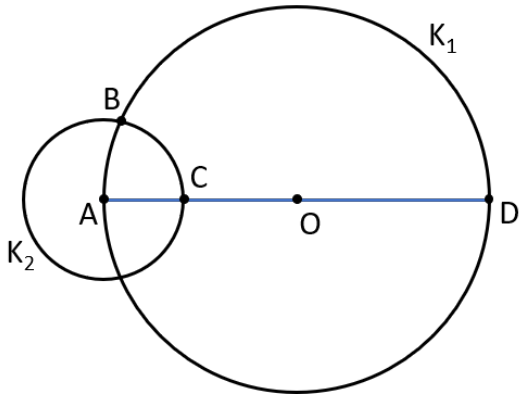


Abbildung 5.16

Aufgabe 5.12
In einem Dreieck ABC teilen die Winkelhalbierende, die Seitenhalbierende und das Lot, alle ausgehend vom Punkt A, den Winkel $\widehat{BAC}$ in drei gleiche Teile. Bestimme alle Winkelmaße des Dreiecks ABC.

5.4.2 Probleme im dreidimensionalen Raum

Aufgabe 5.13
Die Diagonale AC_1 eines Quaders $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ist orthogonal zur Ebene AB_1D. Zeige, dass der Quader ein Würfel ist.

Aufgabe 5.14
Zeige, dass in einem Einheitswürfel die Summe S der Quadrate der Projektionslängen aller Seitenkanten auf eine beliebige Ebene nicht von der Wahl dieser Ebene abhängig ist. Bestimme S.

Aufgabe 5.15
Im Tetraeder $ABCD$ sei ein Punkt M auf der Seitenfläche ABC so gewählt, dass $\overrightarrow{DM} = \alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} + \gamma\overrightarrow{DC}$. Zeige, dass dann $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

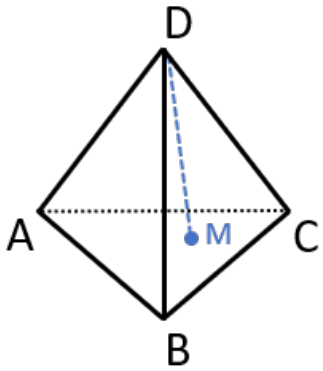


Abbildung 5.17

Aufgabe 5.16
Die Ebene Π_1 gehe durch die Punkte $M = (0,0,0)$, $N = (1,1,1)$ und $K = (3,2,1)$. Die Ebene Π_2 enthalte die Punkte M, N und $R = (3,1,2)$. Finde den Winkel zwischen Π_1 und Π_2.

Aufgabe 5.17

Es sei S die Sphäre, die durch den Punkt $A = (1, -1, 4)$ geht und alle Koordinatenebenen im $\mathbb{R}^3$ berührt. Finde die Gleichung von S

Aufgabe 5.18

Die Basis einer Pyramide $SABC$ bildet das reguläre, das heißt äquilaterale Dreieck ABC, dessen Seitenlänge $4\sqrt{2}$ beträgt. Die Kante SC ist orthogonal zur Ebene ABC und hat die Länge 2. Berechne den Winkel $\alpha = (\widehat{AB, BC})$ zwischen AB und BC und den Abstand zwischen zwei Geraden l_1 und l_2, wobei l_1 die Mitte der Kante BC und den Punkt S verbindet und l_2 durch die Mitte der Kante AB und den Punkt C geht.

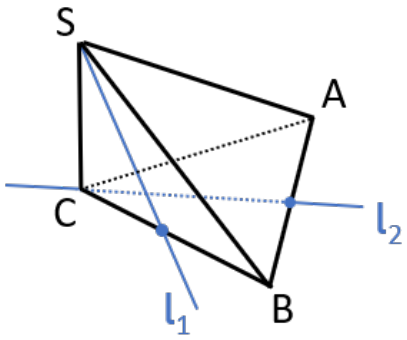


Abbildung 5.18

Aufgabe 5.19

Finde die Winkelmaße aller Winkel zwischen den Geraden in einem regulären Tetraeder, die das Symmetriezentrum mit den jeweiligen Ecken des Tetraeders verbinden.

Aufgabe 5.20

In einem Prisma $ABCA_1B_1C_1$ mit Dreiecksbasis ABC seien die Punkte M, N und P die jeweiligen Mittelpunkte der Kanten AB, BC und AC. Es ist bekannt, dass die Segmente MC_1, NA_1 und PB_1 paarweise orthogonal zueinander sind, mit Länge a. Finde das Volumen des Prismas.

Aufgabe 5.21

In einem Quader $ABCDA_1B_1C_1D_1$ mit quadratischer Basis $ABCD$ der Seitenlänge a sei eine Gerade l konstruiert, die durch den Punkt C_1 und orthogonal zur Ebene BA_1D verläuft.

Finde die Länge der Strecke von l, die innerhalb des Quaders liegt, falls die Seitenlänge von AA_1 gleich

a) $a\sqrt{2}$

b) $\frac{a}{2}\sqrt{2}$

ist.

Aufgabe 5.22
Sei l die Gerade, an der sich die Ebenen $2x - y - z = 0$ und $x - 2y + z = 0$ schneiden. Finde die Winkelmaße der Winkel zwischen

a) den Koordinatenachsen

b) der Koordinatenebene $0xy$

und l.

Aufgabe 5.23
Das Volumen eines Tetraeders $ABCD$ ist gleich S. Durch die Mittelpunkte der Kanten AD und BC sei eine Ebene Π gezogen, die einen Abstand von 1 zum Punkt A hat und die Kante CD im Punkt M schneidet, sodass $|DM| : |MC| = 2 : 3$ ist. Finde die Fläche vom Schnitt $ABCD \cap \Pi$.

Aufgabe 5.24
Zeige, dass in einem Tetraeder

a) Liniensegmente, die die Ecken mit Schnittpunkten aller Seitenhalbierenden in der jeweiligen Seitenfläche verbinden, sich in einem Punkt O schneiden, der diese Segmente (von der jeweiligen Ecke betrachtend) im Verhältnis $3 : 1$ teilt.

b) Liniensegmente, die die Mitten der sich nicht schneidenden Kanten des Tetraeders verbinden, sich im selben Punkt O schneiden, der die Mitte von jedem von ihnen bildet.

Aufgabe 5.25
Im regulären Tetraeder $ABCD$ mit Kantenlänge a seien Punkte M, N und P auf den Kanten DA, DC und BC so gewählt, dass $|DM| = |CN| = \frac{a}{3}$ und $|CP| = \frac{a}{5}$ ist. Zeichne den Schnitt von $ABCD$ durch die Ebene MNP und bestimme die Länge des Liniensegments BQ, wobei $\{Q\} = MNP \cap AB$.

Aufgabe 5.26
In einem Würfel $ABCDA_1B_1C_1D_1$ mit Kantenlänge a seien Punkte M und Q auf den Kanten AD und B_1C_1 sowie Punkte P und N auf der Kante CD so gewählt, dass $|AM| = |C_1Q| = |CP| = |DN| = \frac{a}{3}$ ist. Zeichne den Schnitt des Würfels mit der Ebene, die durch die Gerade MP parallel zur Geraden NQ geht, und finde die Fläche von diesem Schnitt.

Aufgabe 5.27
In einem Quader $ABCDA_1B_1C_1D_1$ seien Lote A_1P und BQ zur Diagonalen AC_1 konstruiert, die von Ecken A_1 und B ausgehen. Finde die Länge des Liniensegments PQ, falls $|AB| = a$, $|AD| = b$ und $|AA_1| = c$ ist.

Aufgabe 5.28
Die Basis der Pyramide $SABCD$ sei ein Trapez $ABCD$. Die Längen der parallelen Seiten von $ABCD$ stehen in Proportion $1 : 2$ zueinander. Konstruiere den Schnitt von $SABCD$ mit einer Ebene, die durch den Punkt D sowie die Mittelpunkte der Kanten SA und SB geht. Finde das Verhältnis, in dem diese Ebene die Kante SC teilt.

Aufgabe 5.29
In einer regulären Pyramide $SABCD$ mit Seitenlänge a des Quadrats $ABCD$ und Länge l der Kanten SA, SB, SC und SD werden Schnittebenen parallel zur Kante SA und zur Diagonale BD konstruiert. Finde die größtmögliche Fläche eines Schnittes von $SABCD$ mit einer solchen Ebene.

Aufgabe 5.30
Zeige, dass es in einem Tetraeder $ABCD$ genau einen Punkt O mit der Eigenschaft $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{O}$ gibt.

Aufgabe 5.31
Die Basis einer Pyramide $SABCD$ bildet ein Parallelogramm $ABCD$. Eine Ebene schneidet Kanten SA, SB, SC und SD in Punkten M, N, P und Q. Sei $|SA| : |SM| = m$, $|SB| : |SN| = n$, $|SC| : |SP| = p$ und $|SD| : |SQ| = q$. Zeige, dass dann $m + p = n + q$.

Aufgabe 5.32
Es sei ein Tetraeder $ABCD$ mit $|AC| = |BD|$ und $\alpha = (\widehat{AC, BD})$ gegeben. Seien Punkte M und N die Mitten der Kanten BC und AD. Bestimme das Winkelmaß des Winkels zwischen den Geraden MN und AC, finde dabei alle Lösungen.

Aufgabe 5.33

Auf den Diagonalen D_1A und A_1B eines Würfels $ABCDA_1B_1C_1D_1$ mit Kantenlänge a seien Punkte M und N so gewählt, dass $|D_1M| : |D_1A| = |NB| : |A_1B| = 1 : 3$ ist. Finde den Abstand von der Ecke C zur Geraden MN.

Aufgabe 5.34

Alle Kantenlängen eines Parallelepipeds $ABCDA_1B_1C_1D_1$ sind gleich a. Alle Winkel bei der Ecke A haben das Maß $\frac{\pi}{3}$. Bestimme den Abstand zwischen den Geraden AC und DB_1.

Aufgabe 5.35

In einem regulären Tetraeder $ABCD$ mit Kantenlänge a seien Punkte E und F auf den Kanten AD und BD so gewählt, dass $|DE| : |EA| = |BF| : |FD| = 2$ ist. Bestimme die Fläche des Dreiecks CEF.

Aufgabe 5.36

Die Basis einer Pyramide bildet ein reguläres 8-Eck mit Seitenlänge a. Die Spitze S der Pyramide habe den Abstand b zur Basis. Finde die Summe der Quadrate der Kantenlängen aller Kanten, die S mit der Basis verbinden.

6 Olympiade-Probleme

Die Mathe-Olympiade ist eine Denksportart, für die eine lange Vorbereitungsphase von Nöten ist. Mathematische Lösungsstrategien aus den letzten Kapitel sind aber dennoch nicht hinreichend, um Aufgaben einer Olympiade bewältigen zu können.
Ziel dieses Kapitels ist es, einen Einblick in die Olympiade-Probleme zu bekommen, um so die eigene mathematische Raffinesse noch weiter schärfen zu können. Wir werden sehen, dass diese Art der Lösungsstrategien kurz und teilweise kontraintuitiv sein werden. Das Studium dieses Kapitels ermöglicht dem Leser die Entwicklung einer gewissen Intuition und Erfahrung bei einer solchen Art von Aufgabestellungen. Einige von diesen werden im Folgen vorgestellt und gelöst.

6.1 Zahlenprobleme

Aufgabe 6.1 (UdSSR, 10. Klasse, Schulolympiade, mit modifizierten Zahlen)
Gibt es eine Zahl der Form

$$201920192019\ldots2019\,00\ldots0,$$

die sich durch 2020 teilen lässt?

Lösung 6.1
Ja, die gibt es. Betrachte die 2021 Zahlen X_j, $j \in \{1,\ldots,2021\}$

j	1	2	3	$\ldots$	2021
X_j	2019	20192019	201920192019	$\ldots$	$\underbrace{20192019\ldots2019}_{\text{2021-mal}}$

.

Zwei dieser Zahlen haben gleiche Residuen beim Teilen durch 2020, es existieren also $i, j \in \{1, \ldots, 2021\}$, $i > j$, $m \in \{0, \ldots, 2019\}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} X_i = a \cdot 2020 + m \\ X_j = b \cdot 2020 + m \end{cases}.$$

Wähle nun $X := X_i - X_j = (a-b)2020 > 0$. Dann gilt $X \mid 2020$.

Aufgabe 6.2 (UdSSR, 10. Klasse, Stadtolympiade)
Finde alle Primzahlen p und q, sodass $p^2 - 2q^2 = 1$ ist.

Lösung 6.2
Es gelte $p^2 - 2q^2 = 1$. Da q eine Primzahl ist, gilt $q \nmid 3$. Nach Lemma 6.1 existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass $q^2 = 3n + 1$ ist. Daraus folgt $2q^2 + 1 = 6n + 3$, das heißt $p \mid 3$. Da p aber eine Primzahl ist, muss $p = 3$ sein. Daraus folgt

$$4q^2 = 9 - 1 = 8 \Longrightarrow q^2 = 4 \Longrightarrow q = 2.$$

Lösungsmenge: $(p, q) = (3, 2)$

Aufgabe 6.3 (New York, 1976)
Seien $a, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Ist die Aussage

$$\sum_{k=0}^{n} (a^2+1)^{3k} a_k \mid a^2 \pm a + 1 \iff \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \mid a^2 \pm a + 1$$

wahr?

Lösung 6.3
Setze $b_\epsilon = a^2 + \epsilon a + 1$ mit $\epsilon \in \{1, -1\}$. Dann gilt

$$(a^2+1)^3 = (b_\epsilon - \epsilon a)^3 \equiv -\epsilon a^3 \mod b_\epsilon.$$

Aus der Definition von b_ϵ folgt

$$\begin{aligned} a^2 = b_\epsilon - \epsilon a - 1 \overset{\cdot(-\epsilon a)}{\Longrightarrow} -\epsilon a^3 &= -\epsilon a b_\epsilon + \underbrace{e^2}_{=1} a^2 + \epsilon a = b_\epsilon(-\epsilon a + 1) - 1 \equiv -1 \mod b_\epsilon \\ &\Longrightarrow (a^2+1)^3 \equiv -1 \mod b_\epsilon \\ &\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} (a^2+1)^{3k} a_k \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \mod b_\epsilon. \end{aligned}$$

Dies entspricht der Behauptung.

Aufgabe 6.4 (Jugoslawien, 1976)
Es seien 99 Zahlen $a_1, \ldots, a_{99}$ durch

$$a_n := \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$$

für alle $n \in \{1 \ldots, 99\}$ gegeben. Berechne die Summe

$$S = \sum_{n=1}^{99} a_n.$$

Lösung 6.4
Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{\left((n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}\right) \cdot \left((n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}\right)} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} \\ &= \frac{(n+1)n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{(n+1)n \cdot \underbrace{(n+1-n)}_{=1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{99} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right] = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Lösungswert: $\frac{9}{10}$

6.2 Polynome

Aufgabe 6.5 (Rumänien, 1962)
Sei $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $n \neq 1$ und $\sin(\alpha) \neq 0$. Zeige, dass das Polynom

$$P(x) = x^n \sin(\alpha) - x \sin(n\alpha) + \sin(n-1)\alpha$$

durch das Polynom

$$Q(x) = x^2 - 2x\cos(\alpha) + 1$$

teilbar ist.

Lösung 6.5
Führe $x_\epsilon = \cos(\alpha) + i\epsilon\sin(\alpha)$ mit $\epsilon \in \{1, -1\}$ ein. Dann gilt

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - x_1)(x - x_{-1}) = \Big(x - \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)\Big)\Big(x - \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\Big) \\ &= x^2 - x\cos(\alpha) + ix\sin(\alpha) - x\cos(\alpha) - ix\sin(\alpha) + \underbrace{\Big(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)\Big)\Big(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\Big)}_{=\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1} \\ &= x^2 - 2x\cos(\alpha) + 1. \end{aligned}$$

Nach der Moivre-Darstellung für $z = r\Big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\Big)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = r^n\Big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\Big).$$

In unserem Fall folgt also

$$x_\epsilon^n = \Big(\cos(\epsilon\alpha) + i\sin(\epsilon\alpha)\Big)^n = \cos(\epsilon n\alpha) + i\sin(\epsilon n\alpha) = \cos(n\alpha) + \epsilon i\sin(n\alpha)$$

und damit

$$\begin{aligned} P(x_\epsilon) &= \Big(\cos(n\alpha) + \epsilon i\sin(n\alpha)\Big)\cdot\sin(\alpha) - \Big(\cos(n\alpha) + \epsilon i\sin(n\alpha)\Big)\cdot\sin(n\alpha) + \sin(n-1)\alpha \\ &= \underbrace{\cos(n\alpha)\sin(\alpha) - \cos(\alpha)\sin(n\alpha)}_{=\sin(1-n)\alpha} + \sin(n-1)\alpha \\ &= -\sin(n-1)\alpha + \sin(n-1)\alpha = 0 \end{aligned}$$

für jedes $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Also besitzt P die Nullstellen x_1, x_{-1} und ist damit nach Satz 6.4 durch $(x - x_1)$ sowie $(x - x_{-1})$, also auch durch das Produkt $(x - x_1)(x - x_{-1}) = Q(x)$ teilbar.

6.3 Geometrie

Aufgabe 6.6 (Belgien, 1977)
Es seien Zahlen $a, b, c > 0$ gegeben. Zeige: Wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Dreieck mit Seitenlängen a^n, b^n und c^n existiert, so sind alle diese Dreiecke gleichschenklig.

Lösung 6.6
Nehme o.B.d.A. $a \leq b \leq c$ an. Falls $c > b$ ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{c^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{c^n} = 0$$

und für ein $n \in \mathbb{N}$ groß genug gilt nicht die Ungleichung $a^n + b^n > c^n$, die für die Existenz eines Dreiecks mit Seitenlängen a^n, b^n und c^n notwendig ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass

$$\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

einen Widerspruch zu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^n}{c^n} + \frac{b^n}{c^n} \right) = 0$$

bildet. Also muss $c \leq b$ und damit $c = b$ gelten, das heißt alle diese Dreiecke sind gleichschenklig.

Aufgabe 6.7 (UK, 1967)
Gegeben sei ein Dreieck, in dem zwei der drei Seiten die Seitenlänge a und b mit $a < b$ haben. Zudem seien h_a und h_b die Längen der Lote auf diese Seiten. Zeige die Ungleichung

$$a + h_a \geq b + h_b. \tag{6.1}$$

Charakterisiere jene Dreiecke, bei denen (6.1) mit Gleichheit erfüllt ist.

Lösung 6.7

Da $\sin(\alpha) \leq 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist, gilt für die Fläche S des Dreiecks (s. Abb. 6.1)

$$2S = ab\sin(\gamma) \leq ab \tag{6.2}$$

und

$$S = \frac{a}{2} \cdot h_a = \frac{b}{2} \cdot h_b.$$

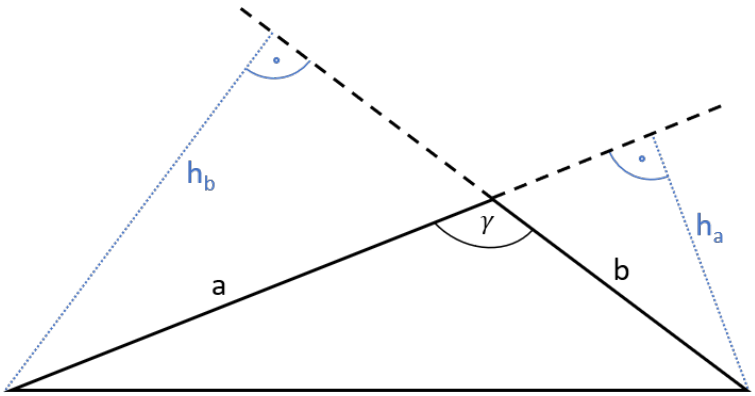


Abbildung 6.1

Daraus folgt

$$h_a = \frac{2S}{a} \qquad h_b = \frac{2S}{b}$$

und

$$(a + h_a) - (b + h_b) = \left(a + \frac{2S}{a}\right) - \left(b + \frac{2S}{b}\right) = a - b + 2S \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$
$$= a - b - 2S \cdot \frac{a-b}{ab} = (a-b)\left(1 - \frac{2S}{ab}\right) \overset{(6.2)}{\geq} 0.$$

Dies ist äquivalent zu (6.1).

Da außerdem $a < b$ und damit $a - b \neq 0$ nach Voraussetzung ist, gilt

$$\begin{aligned} a + h_a = b + h_b &\iff a + h_a - b + h_b = 0 \\ &\iff \big(a - b\big)\left(1 - \frac{2S}{ab}\right) = 0 \\ &\iff \left(1 - \frac{2S}{ab}\right) = 0 \\ &\iff 2S = ab \\ &\overset{(6.2)}{\iff} \sin(\gamma) = 1 \\ &\implies \gamma = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (6.1) ist also genau dann mit Gleichheit erfüllt, wenn das Dreieck ein rechtwinkliges Dreieck ist.

6.4 Analytische Aufgaben

Aufgabe 6.8 (Tschechien, 1983)
Für gegebene $n \in \mathbb{N}$ und $a \in [0, n]$ finde das Maximum von

$$f(x_1, \ldots, x_n) := \left| \sum_{i=1}^{n} \sin(2x_i) \right| \quad \text{unter der Bedingung} \quad \sum_{i=1}^{n} \sin^2(x_i) = a \tag{6.3}$$

bezüglich $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

Lösung 6.8
Zunächst gilt

$$a = \sum_{i=1}^{n} \sin^2(x_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Big(1 - \cos(2x_i)\Big) \iff \sum_{i=1}^{n} \cos(2x_i) = n - 2a.$$

Betrachte die Vektoren $\Big(\cos(2x_i), \sin(2x_i)\Big)$ für $i \in \{1 \ldots, n\}$ der Länge 1 auf der Einheitskreisscheibe. Für die Summe

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Big(\cos(2x_i), \sin(2x_i)\Big) = \left(\sum_{i=1}^{n} \cos(2x_i), \sum_{i=1}^{n} \sin(2x_i)\right)$$

mit $|S| = \ell$ gilt $\ell \leq n$ und damit nach dem Satz des Pythagoras

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left| \sum_{i=1}^{n} \sin(2x_i) \right| = \sqrt{\ell^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \cos(2x_i) \right)^2} \leq \sqrt{n^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \cos(2x_i) \right)^2}$$
$$= \sqrt{n^2 - \big(n - 2a\big)^2} = \sqrt{-4a^2 + 4an} = 2 \cdot \sqrt{a\big(n-a\big)} =: \beta.$$

Wähle nun

$$x_1^\star = \ldots = x_n^\star = \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)$$

und weise nach, dass an diesem Punkt der Wert β auch von f angenommen wird. Wir kennen dafür bereits die Identität $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ aus der Trigonometrie. Zudem gilt $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ aufgrund der Äquivalenz

$$\begin{aligned} \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} &\iff \sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2 \\ &\iff \sin^2(\arccos(x)) + \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2 + \underbrace{\cos^2(\arccos(x))}_{=x^2} \\ &\iff 1 = 1 - x^2 + x^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun für alle $i \in \{1 \ldots, n\}$

$$\sin(2x_i^\star) = 2\sin(x_i^\star)\cos(x_i^\star) = 2\sqrt{\frac{a}{n}} \cdot \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{a}{n}\left(1 - \frac{a}{n}\right)}$$

und (denn die n Summanden sind unabhängig von i)

$$f(x_1^\star, \ldots, x_n^\star) = \left| \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sin(2x_i^\star)}_{\geq 0} \right| = 2n \cdot \sqrt{\frac{a}{n}\left(1 - \frac{a}{n}\right)} = 2 \cdot \sqrt{\frac{an^2}{n}\left(1 - \frac{a}{n}\right)} = \underbrace{2 \cdot \sqrt{a\big(n-a\big)}}_{=\beta}.$$

Die obere Schranke β wird also an mindestens einem Punkt von f erreicht. Daraus folgt bereits, dass β der Maximalwert von (6.3) ist.

Lösungswert: $2 \cdot \sqrt{a\big(n-a\big)}$

Aufgabe 6.9 (UdSSR, 1990)
Kann man aus Funktionen f und g die Funktion $h(x) = x$ konstruieren, indem f und g nur mithilfe von Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen verknüpft werden, falls

a) $f(x) = x^2 + x$ und $g(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = x^2 + x$ und $g(x) = x^2 - 2$

gilt?

Lösung 6.9
Die Antwort auf die beiden Teilaufgaben lautet

a) Nein.
Es gilt $g(-1) = 3$ und $f(-1) = 0$, also soll eine beliebige Kombination aus f und g mithilfe oben genannter Operationen durch 3 teilbar sein. Jedoch gilt $h(-1) = -1 \nmid 3$.

b) Ja.
Es gilt $h(x) := (\underbrace{f-g}_{x+2})^2 - f - (f-g) - (f-g) = (x+2)^2 - x^2 - x - 2(x+2) = 4x - 2x - x = x$.

Aufgabe 6.10 (Belgien, 1976)
Zeige für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\sin(\cos(x)) < \cos(\sin(x)).$$

Lösung 6.10
Sei zunächst $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Für $y = \cos(x)$ benutze die Ungleichung $\sin(y) < y$ für $y \geq 0$:

$$\sin(\cos(x)) < \cos(x)$$

Da die Funktion $\cos(y)$ auf $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ monoton fällt, gilt

$$x \geq \sin(x) \Longrightarrow \cos(x) \leq \cos(\sin(x)) \Longrightarrow \sin(\cos(x)) < \cos(x) \leq \cos(\sin(x)).$$

Sei nun $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Hier gilt $\cos(x) \leq 0$ und damit

$$\sin(\cos(x)) < 0 < \cos(\sin(x)).$$

Die Ungleichung gilt in diesem Fall also auch. Da außerdem $\sin(\cos(x))$ und $\cos(\sin(x))$ gerade Funktionen (symmetrisch bezüglich der y-Achse) sind, gilt die Ungleichung auch für $x \in [-\pi, \pi]$. Da beide Funktionen periodisch mit Periode 2π sind, gilt die Ungleichung auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 6.11 (Kanada, 1983)
Löse die Gleichung

$$x! + y! + z! = n! \tag{6.4}$$

in den natürlichen Zahlen.

Lösung 6.11
Sei $x, y, z, n \in \mathbb{N}$ eine Lösung von (6.4). Setze $\nu := \max\{x, y, z\}$, dann ist $1 \leq \nu < n$ und

$$n \cdot \nu! \leq n \cdot (n-1)! = n! = x! + y! + z! \leq 3 \cdot \nu! \Rightarrow n \leq 3.$$

Falls also $n > 3$ ist, existieren keine $x, y, z \in \mathbb{N}$, sodass (6.4) erfüllt ist. Dies schränkt die Anzahl an möglichen Lösungen bereits stark ein. Da $x! + y! + z! = n!$ mit $n \leq 3$ ist, gilt:

a) $n = 1 \Rightarrow$ keine Lösung.

b) $n = 2 \Rightarrow$ keine Lösung.

c) $n = 3 \Rightarrow n! = 3! = 6 = x! + y! + z! \Rightarrow x = y = z = 2$

Lösungsmenge: $(x, y, z, n) = (2, 2, 2, 3)$.

6.5 Formel- und Faktensammlung

Lemma 6.1
Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \nmid 3$. Dann $\exists\, n \in \mathbb{Z} : m^2 = 3n + 1$.
Beweis:
Falls $m \nmid 3$, $\exists\, \epsilon \in \{1, 2\} : m = 3k + \epsilon$. Also $m^2 = \epsilon^2 + \underbrace{9k^2 + 6k\epsilon}_{\text{durch 3 teilbar}}$, wobei $\epsilon^2 \in \{1, 4\}$. Das heißt

$$m^2 = 3n + 1 \text{ mit } n = 3k^2 + 2k\epsilon + \begin{cases} 0, & \epsilon = 1 \\ 1, & \epsilon = 2 \end{cases}.$$

Lemma 6.2
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n)$ (6.5)

b) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$ (6.6)

c) $a^{2n} - b^{2n} = (a + b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \ldots + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$ (6.7)

d) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \quad \forall b > 0 \text{ und } a \geq \sqrt{b}.$ (6.8)

Satz 6.3 (Kleiner Fermat-Satz)
Falls $a \in \mathbb{Z}$ nicht durch eine Primzahl p teilbar ist, so gilt:

$$a^{p-1} - 1 \mid p.$$

Daraus folgt:

$$a^p \equiv a \mod p.$$

Satz 6.4 (Bézout)
Das Residuum der Teilung des Polynoms $P(x)$ durch $(x - x_0)$ ist gleich $P(x_0)$, d.h.

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + P(x_0),$$

wobei $Q(x)$ ebenfalls ein Polynom ist. Daraus folgt:

$$x_0 \text{ ist Nullstelle von } P \Longleftrightarrow P(x) \mid (x - x_0) \text{ oder } P(x) = (x - x_0)Q(x).$$

Satz 6.5 (Mittelwerte)
Für alle $a_1, \ldots, a_n > 0$ gilt:

$$\underbrace{\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}_{\text{harmonisches Mittel}} \leq \underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}}_{\text{arithmetisches Mittel}} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \tag{6.9}$$

Dabei sind alle Ungleichungen scharf, sofern i und j mit $a_i \neq a_j$ existieren.

Satz 6.6 (Viète)
Für ein Polynom $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ mit Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n & = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots x_{n-1}x_n & = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n & = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n & = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Es gilt auch die Umkehrung des Satzes.

6.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 6.12 (Belgien, 1979)
Finde die Summe aller 7! Zahlen, die sich aus allen möglichen Permutationen von 1234567 ergeben.
Hinweis: Benutze die Dezimaldarstellung der Summanden.

Aufgabe 6.13 (UdSSR, 1990)
Zeige, dass das Produkt gewisser natürlicher Zahlen nicht $4 \cdot 3^{662}$ übersteigt, falls die Summe dieser Zahlen 1990 ist.
Hinweis: Betrachte jene natürlichen Zahlen mit dem maximalen Produkt.

Aufgabe 6.14 (Tschechien, 1971)
Zeige, dass für eine beliebige Primzahl $p > 2$ der Zähler m des Bruches

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

durch p teilbar ist.
Hinweis: Berechne m und n in Abhängigkeit von p.

Aufgabe 6.15 (UdSSR, 1990)
Falls eine zweistellige Zahl ab durch die Zahl $2(a+b)$ geteilt wird, so ergibt sich 3 mit Rest 3. Falls von ab die Zahl $5(a+b)$ abgezogen wird, so ergibt sich 6. Finde ab.

Aufgabe 6.16 (UdSSR, 1990)
Finde alle Primzahlen p, die man als Summe und Differenz zweier Primzahlen darstellen kann.

Aufgabe 6.17 (UdSSR, 1990)
Zeige, dass es zwischen zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen genau ein Glied der beiden Folgen

$$\Big(1 + x, 2(1 + x), 3(1 + x), \ldots\Big)$$

und

$$\left(1+\frac{1}{x}, 2\left(1+\frac{1}{x}\right), 3\left(1+\frac{1}{x}\right), \dots\right)$$

gibt, wobei x eine positive irrationale Zahl ist.

Aufgabe 6.18 (UdSSR, 1990)
Finde alle positiven ganzen Zahlen x, deren Produkt der jeweiligen einzelnen Ziffern in der Dezimaldarstellung gleich $x^2 - 10x - 22$ ist.

Aufgabe 6.19 (New York, 1975)
Zeige:

$$n^n - n^2 + n - 1 \mid (n-1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Hinweis: Benutze Lemma 6.2 a).

Aufgabe 6.20 (Kanada, 1983)
Zeige, dass für jede Primzahl p unendlich viele Zahlen x der Form $x = 2^n - n$ mit $n \in \mathbb{N}$ existieren, für die $x \mid p$ gilt.
Hinweis: Benutze Satz 6.3 (Kleiner Fermat-Satz).

Aufgabe 6.21 (UdSSR, 1990)
Ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten nimmt den Wert 5 an 5 unterschiedlichen ganzzahligen Stellen an. Kann dieses Polynom ganzzahlige Nullstellen besitzen?
Hinweis: Benutze Satz 6.4 (Bézout).

Aufgabe 6.22 (Ungarn, 1983)
Ein Polynom $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$ mit $a_1, \ldots, a_{n-1} \geq 0$ hat n reelle Nullstellen. Zeige, dass $P(2) \geq 3^n$.
Hinweis: Benutze Satz 6.5 (Mittelwerte) und Satz 6.6 (Viète).

Aufgabe 6.23 (DDR, 1977)
Finde alle Polynome $P(x)$, die die Gleichheit $x \cdot P(x-1) \equiv (x-2)P(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Aufgabe 6.24 (USA, 1975)
Ein Polynom des Grades n erfüllt die Gleichung $P(k) = \frac{k}{k+1}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$. Finde

$P(n+1)$.
Hinweis: Beweise, dass genau ein solches P existiert und konstruiere es direkt unter Verwendung von Satz 6.4.

Aufgabe 6.25 (Rumänien, 1983)
Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci-Zahlenfolge, das heißt es gilt:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zeige, dass für ein Polynom $P(x)$ des Grades 990 mit $P(k) = a_k$, $k = 992, \ldots, 1982$, die Gleichung $P(1983) = a_{1983} - 1$ gilt.
Hinweis: Zeige per Induktion, dass aus $P(k) = a_k$ für alle $k = n+2, \ldots, 2n+2$ die Gleichung $P(2n+3) = a_{2n+3} - 1$ folgt.

Aufgabe 6.26 (UdSSR, 1990)
Für das Dreieck ABC gelte die Gleichung

$$a + b = \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Big(a \cdot \tan(\alpha) + b \cdot \tan(\beta)\Big).$$

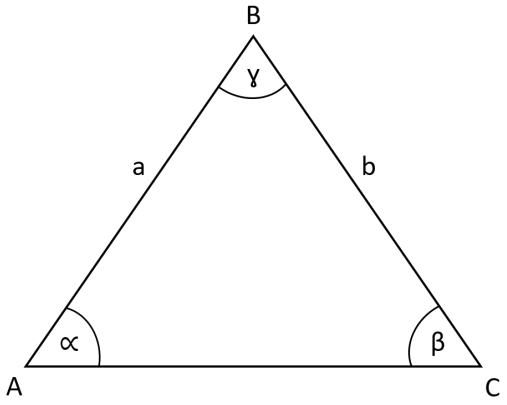


Abbildung 6.1

Zeige, dass ein solches Dreieck gleichschenklig ist.

Aufgabe 6.27 (UdSSR, 1990)
Auf der Ebene seinen Punkte A und B gegeben. Finde die Menge aller Punkte C, die zu A symmetrisch bezüglich der Geraden sind, die durch B gehen.

Aufgabe 6.28 (UdSSR, 1990)
Schreibe in einen gegebenen Kreis ein Dreieck ein. Dabei sind lediglich Punkte im Schnitt des Kreises mit Verlängerungen der Winkelhalbierenden, Seitenhalbierenden und des Lotes gegeben, die alle von denselben Endpunkten des Dreiecks ausgehen.

Aufgabe 6.29 (UdSSR, 1990)
Zeige, dass ein konvexes Achteck mit gleichen Winkeln und rationalen Seitenlängen ein Zentrum der Symmetrie besitzt.

Aufgabe 6.30 (UdSSR, 1990)
Zeige, dass in einem Dreieck mit Seitenlängen a, b, c sowie Radien R und r des umschriebenen und eingeschriebenen Kreises gilt:

$$\frac{a\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} + b\sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} + c\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}}{a+b+c} \geq r$$

Aufgabe 6.31 (Schweden, 1979)
Finde das Maximum von $x^2y^2z^2u$ unter den folgenden beiden Bedingungen:

$$\begin{cases} 2x + xy + z + yzu = 1, \\ x, y, z, u \geq 0. \end{cases}$$

Hinweis: Benutze Satz 6.5 (Mittelwerte).

Aufgabe 6.32 (UdSSR, 1990)
Auf dem Segment $[0,1]$ sei eine Funktion f mit $f(0) = f(1) = 0$ und $f(a)+f(b)-f(\frac{a+b}{2}) \geq 0$ für alle $a, b \in [0,1]$ gegeben. Zeige, dass die Gleichung $f(x) = 0$ auf $[0,1]$ unendlich viele Lösungen besitzt.

Aufgabe 6.33 (UdSSR, 1990)
Finde alle Funktionen f, für die $f(f(x)) = x^2 - 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
Hinweis: Betrachte Fixpunkte von f, also Punkte x, für die $f(x) = x$ gilt.

Aufgabe 6.34 (Ungarn, 1979)
Zeige, dass für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq x$ und $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(x) \equiv x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 6.35 (Rumänien, 1979)
Zeige, dass es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit folgender Eigenschaft: $f(x) \in \mathbb{Q}$ für genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für die $f(x+1) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ gilt.

Aufgabe 6.36 (Bulgarien, 1968)
Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$xf(y) + yf(x) \equiv (x+y)f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Setze $x = y = 1$.

Aufgabe 6.37 (New York, 1975)
Seien $A = \frac{a+b}{2}$ das arithmetische und $B = \sqrt{ab}$ das geometrische Mittel der beiden Zahlen $a, b > 0$, $a \neq b$. Zeige die folgende Ungleichung:

$$B < \frac{(a-b)^2}{8(A-B)} < A.$$

Hinweis: Verwende Satz 6.5 und die Relation $B < \frac{A+B}{2} < A$.

Aufgabe 6.38 (UdSSR, 1990)
Finde alle Tripel von Primzahlen a, b, c, für die $abc < ab + bc + ac$ gilt.

Aufgabe 6.39 (UK, 1970)
Löse die Gleichung

$$\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = \sqrt{x\sqrt{3}} - \sqrt{y\sqrt{3}}$$

in den rationalen Zahlen.

Aufgabe 6.40 (UK, 1975)
Löse die Gleichung

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{x^3 - 1}] = 400$$

in den natürlichen Zahlen, wobei $[a]$ der ganze Teil von $a \in \mathbb{R}$ ist.
Hinweis: Berechne die Anzahl der Zahlen $m \in \mathbb{N}$, für die $[\sqrt[3]{m}] = k$, $k \in \mathbb{N}$ fixiert, gilt.

Aufgabe 6.41

Löse die folgenden Gleichungen:

a) $\sin(x) = x^2 + x + 1$

Hinweis: Finde x mit $x^2 + x + 1 > 1$.

b) $\sin^{13}(x) + \cos^8(x) = 1$

Hinweis: Benutze $|\sin(x)| \leq 1$, $|\cos(x)| \leq 1$, $\sin^{13}(x) \leq \sin^2(x)$ und $\cos^8(x) \leq \cos^2(x)$.

c) $\log_2\left(\cos^2(xy) + \dfrac{1}{\cos^2(xy)}\right) = \dfrac{1}{y^2 - 2y + 2}$

Hinweis: Finde den Definitionsbereich der linken Seite der Gleichung und betrachte daraus resultierende Ungleichungen für die linke bzw. rechte Seite der Gleichung getrennt.

7 Lösungen

Im Folgenden werden die Lösungen zu den einzelnen Übungsaufgaben angegeben.

7.1 (Un)gleichungen

2.12. $x = -3$

2.13. $x \in \{-1, 7\}$

2.14. $x \in [1, 2]$

2.15. $x \in \{-3, -4\}$

2.16. $(x, y) \in \left\{(3, 2), \left(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}\right)\right\}$

2.17. $(x, y) \in \left\{(2, 3), \left(\frac{23}{4}, -\frac{9}{2}\right)\right\}$

2.18. $(x, y) = (4, 1)$

2.19. $x \in (-\infty, 7) \cup \{10\}$

2.20. $x \in \left[-9, \frac{34 + 2\sqrt{29}}{5}\right]$

2.21. $x \in \left[-\sqrt{2}, -1\right) \cup \left(-1, \sqrt{2}\right] \cup [3, 4)$

2.22. $x = \frac{13}{2}$

2.23. $x \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right] \cup [-1, 0) \cup \left(0, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right) \cup [4, \infty)$

2.24. $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

2.25. $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -1$

2.26. $x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 4\right)$

2.27. $x \in (-2, -1] \cup \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

2.28. $x \in (-2, 2) \cup (2, \infty)$

2.30. $x = \frac{6}{10}$

2.31. $a \in (-\infty, -1) \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$

2.32. $x \in \{-7, -2, 1\}$

2.33.

$$\begin{cases} x > 1 & \text{für } a > 1 \\ x \in (0, \sqrt{a} - a) \cup (1 - a, 1] & \text{für } a \in (0, 1) \end{cases}$$

2.34. $x = 2$

2.35. $x = 6$

2.36. $x = -2 - \sqrt{10}$

2.37. $x = 2$

2.38. Die Summe hat den Wert $\log_2 11$

2.39. $x = 8$

2.40. $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (4, \infty)$

2.41. $x \in \left(2 - \sqrt{2}, \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, 2 + \sqrt{2}\right)$

2.42. $x \in (-\infty, -1)$

2.43. $x \in (0, 2 - \log_2 3) \cup (1, \infty)$

2.44. $(x, y) \in \left\{(5, 0), \left(\frac{1}{5}, 2\right)\right\}$

2.45. $x \in (-3,1) \cup (3,4)$

7.2 Trigonometrie

3.13. $-\arccos\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

3.14. $\frac{\pi}{12} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

3.15. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

3.18. a) $\frac{\cos((n+2)\alpha)\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)}$

b) $\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - 2\cot(2\alpha)$

3.21. a) $-\frac{1}{8}$

b) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$

3.22. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$
$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

3.23. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \frac{5\pi}{8} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2\pi n,$
$\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{7\pi}{8} + 2\pi n \le x \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

3.24. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{9\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

3.25. $a = \frac{\tan^2(1)+2}{2(2\tan(1)-1)} \Rightarrow x \in \{0, 2\pi, -2\pi\}$
$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3\pi^2 \pm 2\pi \arccos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\arccos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}$

3.26. $a = \frac{\pi^3}{32},\ \frac{\pi^3}{8} < a \le \frac{7\pi^3}{8}$

3.27. $\sqrt{3\pi},\ \frac{\sqrt{1+8\pi}-1}{2}$

3.28. $\frac{\pi(1+2n)}{8}$, $\frac{\pi(1+2n)}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$

3.29. $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

3.30. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{4} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3.31. $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n \pm \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 - n}\right)$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0, -1\}$

3.32. πn, $\frac{\pi(1+2n)}{16}$, $n \in \mathbb{Z}$

3.33. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $-\arcsin\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3.34. $|a| \leq 1$

3.35. $|p| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

3.36. $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi m, (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$

3.37. $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi m, (-1)^{m+n+1}\arcsin\left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{12}}{4} + \pi n\right)\right)$,
$\left(\pi m, (-1)^m\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$,
$\left(\frac{\pi}{2} + \pi m, (-1)^{m+1}\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$

3.38. $\left(\frac{\pi}{4} + \pi m, \pi(2n+m), \frac{3\pi}{4} + \pi(2p+m)\right)$,
$\left(-\frac{\pi}{4} + \pi m, \frac{\pi}{2} + \pi(2n+m), \frac{\pi}{4} + \pi(2p+m)\right)$,
$\left(-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi m}{2}, \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \pi\left(2n - \frac{m}{2}\right), -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \pi\left(2p + \frac{m}{2}\right)\right)$,
$m, n, p \in \mathbb{Z}$

3.39. $\left((-1)^n\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + \pi n, \pm\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \pi m\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$

3.40. $\left((-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi m\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$

7.3 Gleichungssysteme

4.9. $(-1, 2, 3)$

4.10.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{a+2}, \dfrac{2}{a+2}\right) & \text{für } a \neq -2, 1\,, \\ \varnothing & \text{für } a = -2, \\ (t, 1, -t) & \text{für ein beliebiges } t \in \mathbb{R} \text{ mit } a = 1 \end{cases}$$

4.11.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}(1-t), t\right) & \text{für ein beliebiges } t \in \mathbb{R} \text{ mit } a = -1, \\ \left(\dfrac{1}{2}, 0\right) & \text{für } a \neq -1 \end{cases}$$

4.12. $(1, 2, 3)$

4.13. $(3, -1, 2)$

4.14. $(1, -3, -2)$

4.15. $\left(-\dfrac{ab}{(b-1)(1-a)}, \dfrac{b}{(a-1)(b-a)}, \dfrac{a}{(b-1)(b-a)}\right)$, falls $a, b \neq 1, a \neq b$

4.16. $\dfrac{s}{v} = 5 + 5\sqrt{2} > 12$

4.17. 11

4.18. $\dfrac{6}{17}$

4.19.

$$\begin{cases} \text{genau eine Lösung, falls } a \neq 0, a \neq -3, \\ \infty\text{-viele Lösungen, falls } a = -3, \\ \text{keine Lösung, falls } a = 0 \end{cases}$$

4.20. Falls $(a,b) \in \{(0,z),(0,0),(z,0)\}$ für $z \neq 0$ dann existieren ∞-viele Lösungen, sonst existiert genau eine Lösung

4.21. Für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ mit $a^2+b^2+c^2=1$

4.22. $(a,b) \in \{(1,-1),(1,-2),(-1,-1),(-1,-2)\}$

4.23. $a=1$

4.24. $\left(\frac{120}{61},\frac{120}{11},\frac{120}{19}\right)$

4.25. $(4,4,-4)$

4.26. $(1,3),(3,1)$

4.27. $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4},\frac{-1+\sqrt{17}}{4},\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right),\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4},\frac{-1-\sqrt{17}}{4},\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right),(0,1,1),(1,0,1),$
$(1,1,0),\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

4.28. $(2,1),(-2,1),(2,-1),(-2,-1)$

4.29. $(5,-2)$

4.30. $(\sqrt[3]{4},9)$

4.31. $(-1,1)$

4.32. $(4,2)$

4.33. $(2,1)$

4.34. $(2,4)$

4.35. $(1,-1),(5,3)$

7.4 Analytische Geometrie

5.11 $\frac{4}{3}R_1$

5.12 $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$

5.14 8

5.16 $\frac{\pi}{3}$

5.17 $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$

5.18 $\frac{\pi}{4};\ \frac{2}{\sqrt{3}}$

5.19 $\pi-2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

5.20 $\frac{2}{9}a^3$

5.21 a) $\frac{2}{5}\sqrt{10}a$

b) $\frac{\sqrt{10}}{8}a$

5.22 a) $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (alle drei Winkel haben das gleiche Winkelmaß)

b) $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

5.23 $4,5$

5.25 $\frac{a}{2}$

5.26 $\frac{13\sqrt{3}}{18}a^2$

5.27 $\frac{|c^2-a^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

5.28 $2:1$ (vom Punkt S aus betrachtend)

5.29 $\frac{al\sqrt{2}}{3}$

5.32 $\frac{\alpha}{2};\ \frac{\pi-\alpha}{2}$

5.33 $\frac{\sqrt{10}}{3}a$

5.34 $\frac{a}{\sqrt{10}}$

5.35 $\frac{5\sqrt{3}}{36}a^2$

5.36 $8b^2+4a^2(2+\sqrt{2})$

7.5 Olympiade-Probleme

12. 22399997760

15. 21

16. $p = 5$

18. $x = 12$

23. $p(x) = a(x^2 - x)$ mit $a \in \mathbb{R}$

27. Ein Kreis mit Zentrum B und Radius BA

31. $\dfrac{1}{512}$

33. Solche Funktionen f gibt es nicht

36. $f(x) \equiv 0, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

38. $(a, b, c) = (2, 2, p)$, p eine beliebige Primzahl, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 5)$

39. $x = \dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$

40. $x = 5$

41. a) $\varnothing$

    b) $x = \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$

    c) $x = \pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $y = 1$

Literaturverzeichnis

[1] G. N. Jakowlew. *Lehrbuch der Mathematik für Abiturienten.* Nauka Verlag, Moskau, 2. Ausgabe, 1985.

[2] A. P. Karp. *Ich gebe Mathematik-Unterricht. Ein Buch für die Lehrer.* Prosweschenije Verlag, Moskau, 1992.

[3] I. N. Sergeew. *Ausländische Mathematik-Olympiaden.* Nauka Verlag, Moskau, 1987.

[4] M.I. Skanawi. *Mathematische Aufgabensammlung für Abiturienten.* Band 1 & 2, Wysschaja Schkola Verlag, Moskau, 7. Ausgabe, 1996.

[5] W. W. Tkatschuk. *Mathematik für Abiturienten.* Band 1 & 2, MZNMO Verlag, Moskau, 4. Ausgabe, 1997.

[6] Pinskij A. I. Tsypkin, A. G. *Handbuch von Lösungsmethoden der mathematischen Schulaufgaben.* Nauka Verlag, Moskau, 2. Ausgabe, 1989.