

Voronoi und Johnson-Mehl Mosaik

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Mosaik

Konsistenzbedingungen

Geometrische Strukturen

Facets

Interfaces

Erwartungswerte

Intensität

Typische Interfaces

Charakteristiken von Interfaces

Beispiele

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Mosaike

Konsistenzbedingungen

Geometrische Strukturen

Facets

Interfaces

Erwartungswerte

Intensität

Typische Interfaces

Charakteristiken von Interfaces

Beispiele

Mosaik

- ▶ Mosaik: lückenlose Unterteilung des Raumes (z.B. \mathbb{R}^d) in disjunkte Mengen (Zellen, Kristalle)
- ▶ Zufallsmechanismus: stochastischer Prozess einfacher geometrischer Objekte, aus denen das Mosaik nach gewissen Regeln erzeugt wird

Voronoi-Mosaik

Definition

Sei $\Phi = \{x_i\}$ ein Punktprozess, dessen Punkte wir Kerne nennen.

Jeder Kern x_i erzeugt eine konvexe Voronoi-Zelle

$$C_i = C(x_i|\Phi) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall x_j \in \Phi : \|x_i - y\| \leq \|x_j - y\|\}$$

$\{C_i\}$ ist unter gewissen Konsistenzbedingungen ein Voronoi-Mosaik

Voronoi-Mosaik

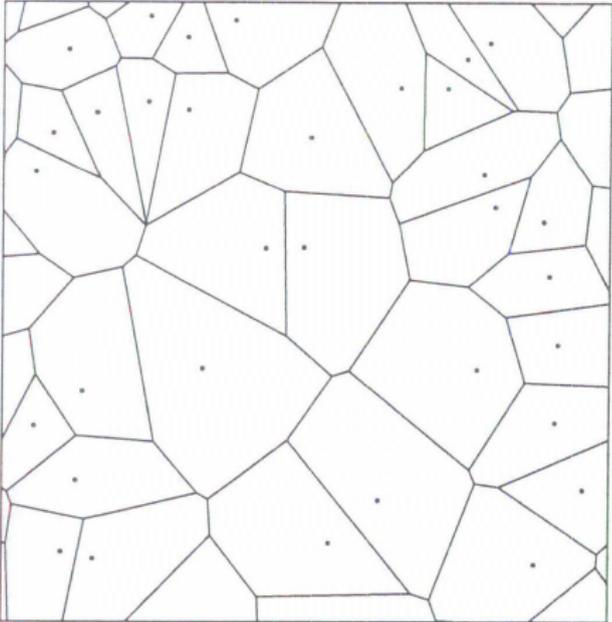


Abbildung: Voronoi-Mosaik

Johnson-Mehl-Mosaik

Definition

- ▶ $\Phi = \{a_i\}$: Punktprozess
- ▶ $a_i = (x_i, t_i) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$: Ankünfte
- ▶ x_i Orte, t_i : Geburtszeiten
- ▶ $T_i(y) = T(y, a_i) = t_i + \frac{\|x_i - y\|}{v}$: Ankunftszeiten
- ▶ $C(a_i | \Phi) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall a_j \in \Phi : T_i(y) \leq T_j(y)\} \neq \emptyset$: Zellen
- ▶ $\{C(a_i | \Phi)\}$ ist unter gewissen Konsistenbedingungen ein Johnson-Mehl-Mosaik

Johnson-Mehl-Mosaik

- ▶ x_i beginnt zur Zeit t_i in alle Richtungen mit konstanter Geschwindigkeit zu wachsen
- ▶ y wird zur Zeit $T_i(y)$ von x_i erreicht
- ▶ $C(a_i|\Phi)$: Menge der Punkte, die zuerst von x_i erreicht werden

Johnson-Mehl-Mosaik

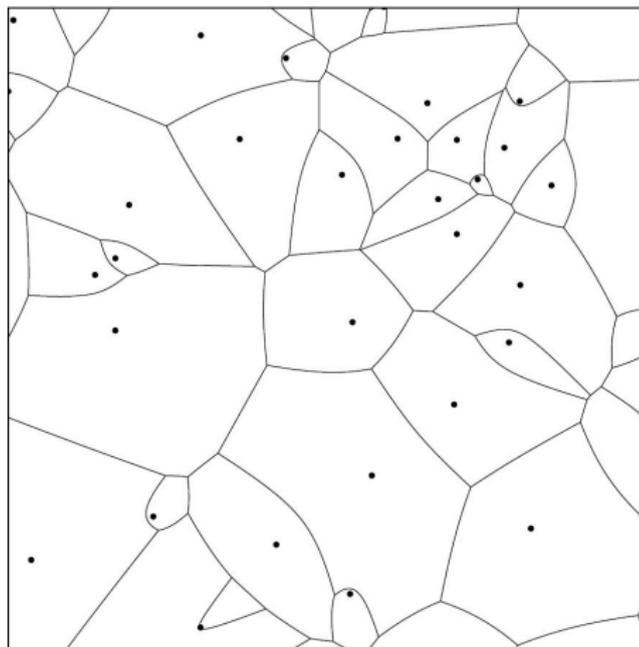


Abbildung: Johnson-Mehl-Mosaik

Eigenschaften von Mosaiken

- ▶ Voronoi-Mosaik: Spezialfall eines Johnson-Mehl-Mosaiks für $t_i = t \forall i$
- ▶ Zellen sternförmig bezüglich ihres Kernes
- ▶ Zelle konvex \Leftrightarrow alle Nachbarn nicht jünger
- ▶ alle Zellen konvex \Leftrightarrow alle Zellen gleich alt (Voronoi-Mosaik)

Eigenschaften von Mosaiken

- ▶ Johnson-Mehl-Mosaik physikalisch interpretierbar
- ▶ breiter Anwendungsbereich
- ▶ Verallgemeinerungen mathematisch schwer handhabbar

Konsistenzbedingungen

Sei $\Phi = \{a_i\} = \{(x_i, t_i)\}$ nicht leer, lokal endlich, stationär
Im Folgenden wird vorausgesetzt

- ▶ (C1) $\forall (x, t) \in \Phi \quad \forall u : \|u\| = 1 \quad \exists (y, s) \in \Phi :$

$$(y - x) \bullet u > v(s - t)$$

- ▶ (C2) $T_j(x_i) \neq t_i \quad \forall i \neq j$
- ▶ (C3) keine $m + 1$ Kerne in einem $(m - 1)$ -dim affinen Unterraum des \mathbb{R}^d ; $m = 1, \dots, d$
- ▶ (C4) keine $d + 2$ Ankünfte in einem beliebigen Punkt zur selben Zeit

Folgerungen aus den Konsistenzbedingungen

- ▶ Zellen beschränkt
- ▶ Zellen lokal endlich
d.h. $\forall B \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt: $\#\{i \mid C_i \cap B \neq \emptyset\} < \infty$
- ▶ $\mathbb{R}^d = \bigcup_i C_i$

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Mosaike

Konsistenzbedingungen

Geometrische Strukturen

Facets

Interfaces

Erwartungswerte

Intensität

Typische Interfaces

Charakteristiken von Interfaces

Beispiele

Facets

Definition

$F_n := \bigcap_{i=0}^m C_i \neq \emptyset$, mit $n = d - m$, $m \geq 0$ heißt n-Facet

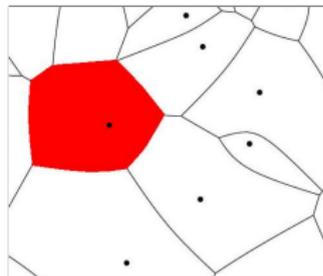


Abbildung: F_2

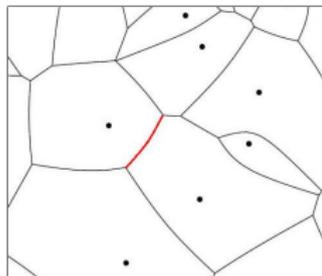


Abbildung: F_1

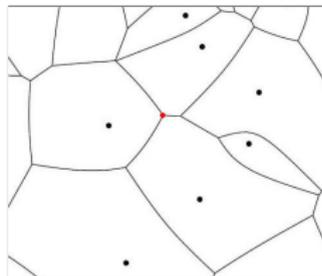


Abbildung: F_0

Eigenschaften von Facets

- ▶ F_0 besteht aus einem oder zwei Punkten
- ▶ im Voronoi-Fall ist F_n ein konvexes Polytop

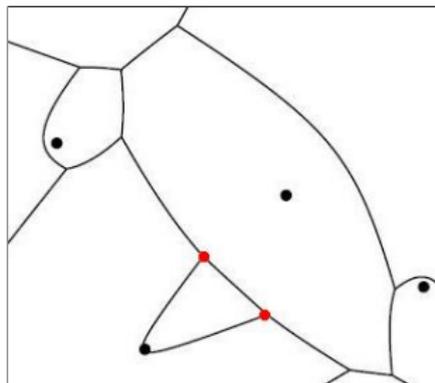


Abbildung: F_0

Interface

Definition

Die verbundenen Komponenten von F_n heißen n -Interfaces

- ▶ 0-Interface = Ecke von $d+1$ Zellen
- ▶ 1-Interface = Kante von d Zellen
- ▶ $(d-1)$ -Interface = Hyperfläche von 2 Zellen

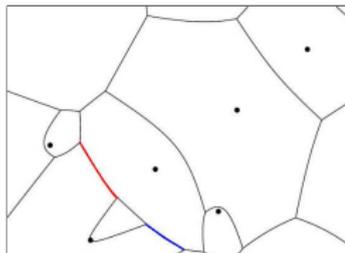


Abbildung: 1 – Interfaces

Voraussetzungen

- ▶ Φ f.s nicht leer, stationär
- ▶ Φ auf Borel-Menge absolut stetig bzgl. der Verteilung eines Poisson Prozess
- ▶ \Rightarrow C1-C4
- ▶ Beispiel: Poisson-Prozess

(k-m)-Interface

- ▶ $L_k \subseteq \mathbb{R}^d$: k-dimensionaler Unterraum
- ▶ $L_k \cap F_n$: (k-m)-Facet mit Dimension (k-m)
- ▶ Zusammenhängende Komponenten von $L_k \cap F_n$: (k-m)-Interfaces
- ▶ $\Phi_p^{(k)}$: Menge der p-Interfaces in L_k

Assoziierter Punkt eines p-Interface

Definition

$X \in \Phi_p^{(k)}$ p-Interface in L_k

$c(X, a_0, \dots, a_m | \Phi) \in L_k$ heißt assoziierter Punkt von X , wenn $c(X, a_0, \dots, a_m | \Phi)$ translationsinvariant

Mögliche Wahl:

$$k = d: c(X, a_0, \dots, a_m | \Phi) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m x_i$$

$k < d$: orthogonale Projektion auf L_k

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Mosaik

Konsistenzbedingungen

Geometrische Strukturen

Facets

Interfaces

Erwartungswerte

Intensität

Typische Interfaces

Charakteristiken von Interfaces

Beispiele

Intensität

Definition

Für $p = 0, \dots, k$ und $m = k - p$ ist die Intensität von p -Interfaces in L_k definiert durch:

$$I_p^{(k)} = \frac{1}{(m+1)! \lambda_k(B)} \mathbb{E} \sum_{a_0, \dots, a_m \in \Phi}^{\neq} \sum_{X \in \Phi_p^{(k)}: X \subseteq F_n \cap L_k} \mathbf{1}_{[c(X, a_0, \dots, a_m | \Phi) \in B]}$$

$B \subseteq L_k$ Borelmenge mit $0 < \lambda_k(B) < \infty$

Anschauung

- ▶ $I_p^{(k)}$: unabhängig von B , da Φ stationär, Lemma von Haar
- ▶ $I_p^{(k)}$: erwartete Anzahl von p -Interfaces pro Einheitsvolumen
- ▶ $I_d^{(d)} =: \lambda$: erwartete Anzahl von Zellen
- ▶ $I_0^{(k)}$: erwartete Anzahl von Ecken

Typische Interfaces

Sei $0 < I_p^{(k)} < \infty$, $0 \leq p \leq k \leq d$, $A \in \mathcal{F}$.

Die Palm-Verteilung ist gegeben durch

$$P_p^{(k)}(A) = \frac{1}{(m+1)! I_p^{(k)} \lambda_k(B)}$$

$$\times \mathbb{E} \sum_{a_0, \dots, a_m \in \Phi}^{\neq} \sum_{X \in \Phi_p^{(k)} : X \subseteq F_n \cap L_k} \mathbf{1}_{[c(X, a_0, \dots, a_m | \Phi) \in B, X - c(X, a_0, \dots, a_m | \Phi) \in A]}$$

Definition

Die zufällige abgeschlossene Menge $C_p^{(k)}$ mit der Verteilung $P_p^{(k)}(A)$ heißt typisches p-Interface in L_k

Typische Zelle vs. Nullpunktzelle

- ▶ Bezeichne $\mathcal{C} = \mathcal{C}_d^{(d)}$ die typische Zelle
- ▶ Sei C die Zelle die einen beliebigen festen Punkt enthält
- ▶ $P(C \in F) = \lambda \mathbb{E}(\mathbf{1}_{[C \in F]} \lambda_d(C))$
für F translationsinvariant in \mathbb{R}^d
- ▶ $\Rightarrow C$ größer als \mathcal{C} ,
d.h. $\mathbb{E} \lambda_d(C) \geq \mathbb{E} \lambda_d(\mathcal{C})$

Charakteristiken von Interfaces

Definition

Sei $0 \leq q \leq p \leq k$:

► $N_{pq}^{(k)} = \mathbb{E} \# \{q\text{-Interfaces in } \mathcal{C}_p^{(k)}\}$

z.B. $N_{d0}^{(d)} =$ erwartete Anzahl von Ecken pro Zelle

► $V_{pq}^{(k)} = \mathbb{E} \sum_{X \subseteq \mathcal{C}_p^{(k)} \text{ } q\text{-Interface}} \lambda_q(X)$

z.B. $V_{dd}^{(d)} =$ erwartetes Volumen einer Zelle

Charakteristiken von Interfaces

Definition

Für $m = k - p$ sei

$$\mu_{kp} = \mathbb{E} \sum_{a_0, \dots, a_m \in \Phi}^{\neq} \frac{\lambda_p(B \cap F(a_0, \dots, a_m | \Phi))}{(m+1)!} \text{ mit } \lambda_k(B) = 1$$

das erwartete p -Volumen von p -Interfaces pro Einheitsvolumen im L_k

Zusammenhänge

Satz

Sei $0 \leq q \leq p \leq k$:

- ▶ $I_p^{(k)} N_{pq}^{(k)} = \binom{k-q+1}{p-q} I_q^{(k)}$
- ▶ $I_p^{(k)} V_{pq}^{(k)} = \binom{k-q+1}{p-q} \mu_{kq}$

Beispiele in der Ebene

- ▶ Größen je Einheitsfläche

$$I_2^{(2)} = \lambda \text{ (Erwartete Anzahl von Zellen)}$$

$$I_1^{(2)} = 3\lambda \text{ (Erwartete Anzahl von Kanten)}$$

$$I_0^{(2)} = 2\lambda \text{ (Erwartete Anzahl von Ecken)}$$

- ▶ Größen je Einheitsstrecke

$$I_1^{(1)} = I_0^{(1)} = \mu_{10}$$

(Erwartete Anzahl von Kanten, Ecken)

Beispiele in der Ebene

- ▶ $N_{21}^{(2)} = N_{20}^{(2)} = 6$
(Erwartete Anzahl von Kanten, Ecken pro Zelle)
- ▶ $N_{10}^{(2)} = N_{10}^{(1)} = 2$
(Erwartete Anzahl von Ecken pro Kante)

Beispiele in der Ebene

- ▶ $V_{22}^{(2)} = \frac{1}{\lambda}$ (erw. Fläche pro Zelle)
- ▶ $V_{21}^{(2)} = \frac{2\mu_{21}}{\lambda}$ (erw. Kantenlänge pro Zelle, erw. Kantenlänge pro Einheitsfläche)
- ▶ $V_{11}^{(2)} = \frac{\mu_{21}}{3\lambda}$ (erw. Kantenlänge einer Kante)
- ▶ $V_{11}^{(1)} = \frac{1}{\mu_{10}}$ (erw. Durchmesser einer Zelle, erw. Anzahl von Schnittpunkten je Einheitsstrecke)

Beispiele Poisson-Voronoi-Mosaik in der Ebene

- ▶ $\mu_{21} = 2 \cdot \sqrt{\lambda}$ (Erwartete Kantenlänge pro Einheitsfläche)
- ▶ $\mu_{10} = \frac{4 \cdot \sqrt{\lambda}}{\pi}$ (Erwartete Anzahl von Ecken je Einheitsstrecke)
- ▶ $I_1^{(1)} = I_0^{(1)} = \frac{4 \cdot \sqrt{\lambda}}{\pi}$ (Erwartete Anzahl von Kanten, Ecken je Einheitsstrecke)

Beispiele Poisson-Voronoi-Mosaik in der Ebene

- ▶ $V_{21}^{(2)} = \frac{4}{\sqrt{\lambda}}$ (Erwartete Kantenlänge pro Zelle)
- ▶ $V_{11}^{(2)} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{\lambda}}$ (Erwartete Kantenlänge einer Kante)
- ▶ $V_{11}^{(1)} = \frac{\pi}{4 \cdot \sqrt{\lambda}}$ (Erwarteter Durchmesser einer Zelle)

Inhaltsverzeichnis

Einführung

- Mosaike

- Konsistenzbedingungen

Geometrische Strukturen

- Facets

- Interfaces

Erwartungswerte

- Intensität

- Typische Interfaces

- Charakteristiken von Interfaces

Beispiele

Poisson-Prozess mit $\lambda = 1$

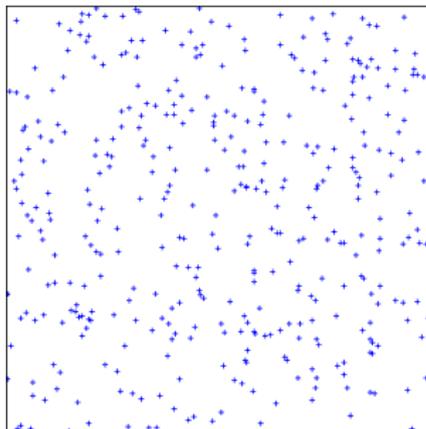


Abbildung: Poisson-Prozess $[0, 20]^2$ mit 391 Punkten

Voronoi-Mosaik

391 Zellen, 1174 Kanten, 727 Ecken

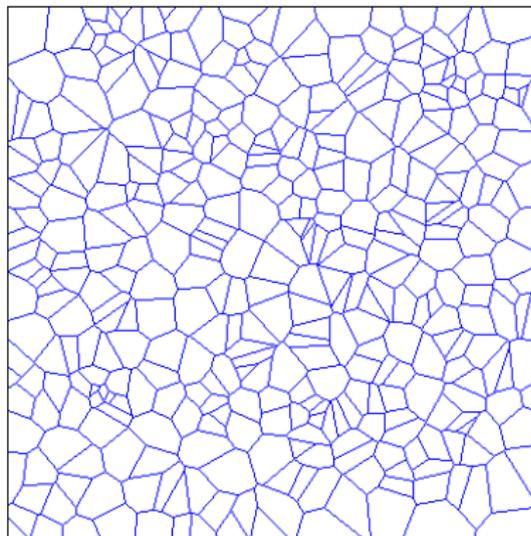


Abbildung: Voronoi-Mosaik $[0, 20]^2$

Histogramm der Ecken

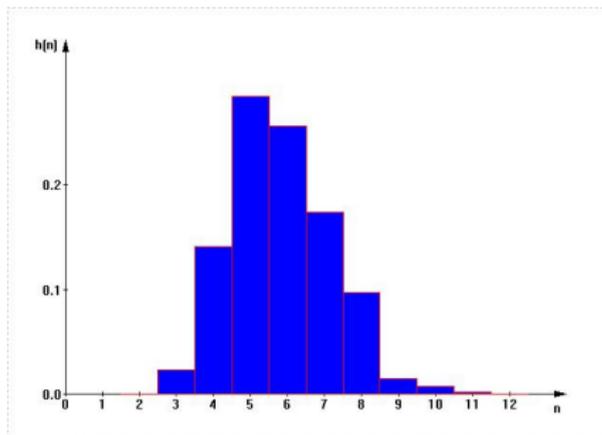


Abbildung: Histogramm der relativen Häufigkeit von Ecken pro Zelle

Dichte der Kantenlänge pro Zelle

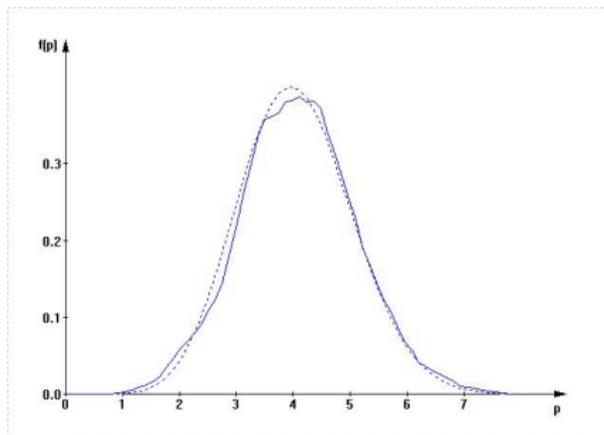


Abbildung: Dichte der Kantenlänge pro Zelle

Dichte der Fläche pro Zelle

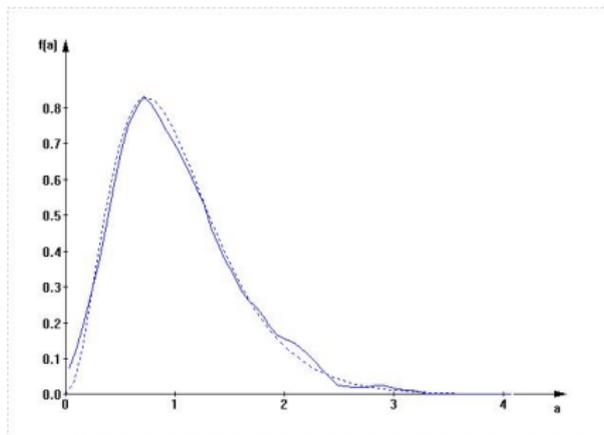


Abbildung: Dichte der Fläche pro Zelle

Schätzer für λ

- ▶ In der Ebene: $\hat{\lambda} = \frac{\#Zellen}{Fläche} = \frac{391}{400} = 0.98$
- ▶ Für $d > 2$ nicht mehr möglich da nicht alle Zellen sichtbar
- ▶ Besser: Schnittpunkte mit Test-Geraden ermitteln und daraus $\hat{\lambda}$ berechnen

Schätzer für λ

- ▶ Ein Schätzer für λ ist $\hat{\lambda} = \frac{1}{c_d \cdot \left(\frac{\text{Länge der Geraden}}{\#\text{Schnittpunkte}}\right)^d}$
- ▶ c_d Konstante die vom Punktprozess abhängt

Heuristische Begründung

- ▶ Betrachte regelmässiges n-Eck dann ist
Fläche = Durchmesser² · c_n
- ▶ $\lambda = \frac{1}{V_{22}^{(2)}} = \frac{1}{(V_{11}^{(1)})^2 \cdot c_2}$
- ▶ c₂ berechnen das obige Gleichung erfüllt
- ▶ c₂ = 16/(π)² für Voronoi-Mosaik in der Ebene
- ▶ Analoges geht auch für c_d und Johnson-Mehl-Mosaik

Voronoi-Mosaik

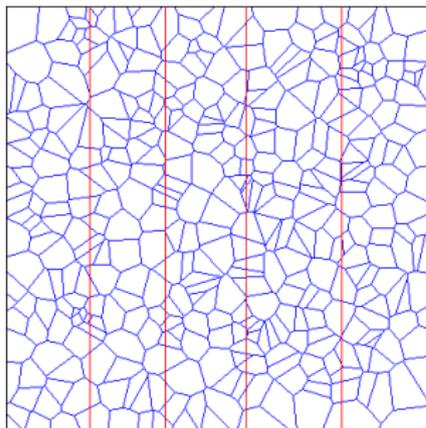


Abbildung: Mit 4 Geraden um λ zu schätzen

Beispiel zur λ Schätzung

- ▶ Länge der Geraden = $4 \cdot 20 = 80$
- ▶ Anzahl der Schnittpunkte = $24+27+23+26 = 100$
- ▶ $\hat{\lambda} = \frac{1}{\left(\frac{80}{100}\right)^2 \cdot \frac{16}{\pi^2}} = 0.96$

Literaturverzeichnis

- ▶ J.Møller (1999):
Topics in Voronoi und Johnson-Mehl tessellations
In: O.Barndorff-Nielsen, W.Kendall, M.N.M.Lieshout (eds.):
Stochastic Geometry. Likelihood and Computation,
Chapman&Hall/CRC
- ▶ J.Møller (1992) Random Johnson-Mehl tessellations.
Adv.Appl.Prob.24, 814-844
- ▶ R.Schneider, W.Weil (2000), Stochastische Geometrie,
Teubner Stuttgart
- ▶ Stochastic Geometry Version 4.1, TU Bergakademie
Freiberg Institut für Stochastik