ulm university universität uulm

Bayesian analysis of spatial point processes in the neighbourhood of Voronoi networks

Seminar: Stochastische Geometrie und ihre Anwendungen - Zufällige Netzwerke

Judith Schmidt und Bettina Hund | 02 Juli 2008 |

Inhaltsverzeichnis

Wiederholung
- Voronoi- und Delaunay-Mosaike
- Bezeichnungen

Modell
- Daten
- Konstruktion der Intensitätsfunktion
- Bayes Theorem
- Konstruktion des Mosaiks

Simulationsbeispiel anhand von Dachsdaten
- Bewertung des Modells

Literatur

Motivation

Abbildung: Dachs

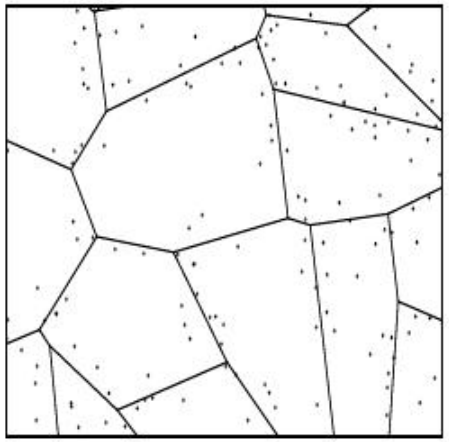


Abbildung: Latrinen

Ziel des Vortrages

- Gegeben: Latrinen der Dachse in einem Gebiet
- Gesucht: Grenzen der Territorien der einzelnen Dachse

Inhaltsverzeichnis

Wiederholung
- Voronoi- und Delaunay-Mosaike
- Bezeichnungen

Modell
- Daten
- Konstruktion der Intensitätsfunktion
- Bayes Theorem
- Konstruktion des Mosaiks

Simulationsbeispiel anhand von Dachsdaten
- Bewertung des Modells

Literatur

Wiederholung

Voronoi-Mosaik

- $\bar{B} \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und konvex, $d \geq 2$
- $\mathbf{y} = \{y_i\} \subset \bar{B}$, *homogener Poisson-Punktprozess*, eingeschränkt auf $\bar{B}$
- *Voronoi-Zelle* $C\left(y_i \mid \mathbf{y}\right)$ ist definiert durch

$$C\left(y_i \mid \mathbf{y}\right) = \left\{s \in \bar{B} : \|y_i - s\| \leq \|y_j - s\| \, \forall y_j \in \mathbf{y}\right\}, y_i \in \mathbf{y}$$

- *Voronoi-Mosaik* wird mit $\mathcal{V}(\mathbf{y})$ bezeichnet

Delaunay-Mosaik

Das duale Mosaik zum Voronoi-Mosaik $\mathcal{V}(\mathbf{y})$ heißt *Delaunay-Mosaik* $\mathcal{T}(\mathbf{y})$.

Wiederholung

Voronoi-Mosaik

- $\bar{B} \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und konvex, $d \geq 2$
- $\mathbf{y} = \{y_i\} \subset \bar{B}$, *homogener Poisson-Punktprozess*, eingeschränkt auf $\bar{B}$
- *Voronoi-Zelle* $C\left(y_i \mid \mathbf{y}\right)$ ist definiert durch

$$C\left(y_i \mid \mathbf{y}\right) = \left\{s \in \bar{B} : \|y_i - s\| \leq \|y_j - s\| \, \forall y_j \in \mathbf{y}\right\}, y_i \in \mathbf{y}$$

- *Voronoi-Mosaik* wird mit $\mathcal{V}(\mathbf{y})$ bezeichnet

Delaunay-Mosaik

Das duale Mosaik zum Voronoi-Mosaik $\mathcal{V}(\mathbf{y})$ heißt *Delaunay-Mosaik* $\mathcal{T}(\mathbf{y})$.

Graphiken der beiden Mosaike

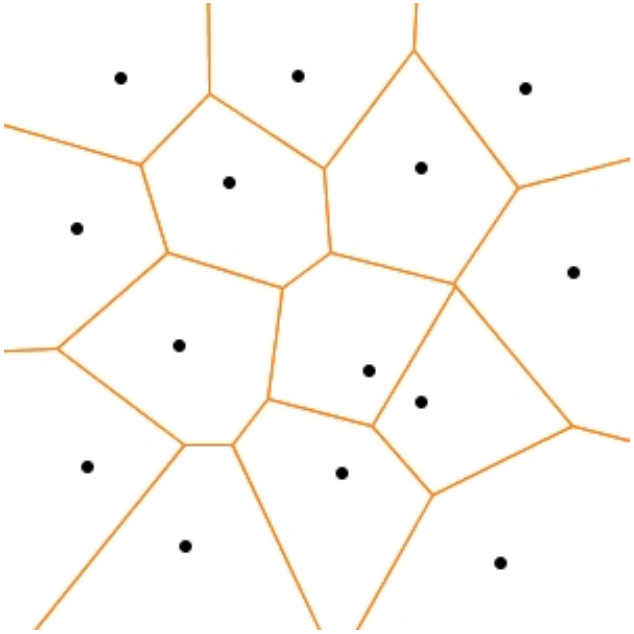


Abbildung: Voronoi-Mosaik

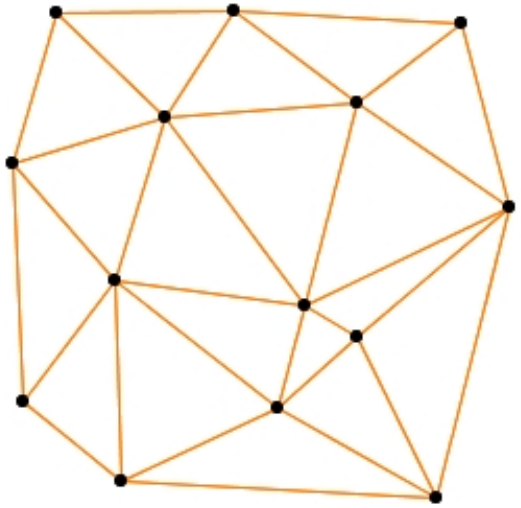


Abbildung: Delaunay-Mosaik

Bezeichnungen

Bedingungen an den Poisson -Punktprozess

- $n(\mathbf{y}) \geq d$, wobei $n(\mathbf{y})$ *die Anzahl der Nuklei* angibt
- $\mathbf{y}$ ist *in allgemeiner quadratischer Position*, d.h. es liegen keine $k+1$ Nuklei in einem $k-1$ dim. Unterraum des $\mathbb{R}^d$, $k = 2 \ldots d$ und auf der Oberfläche einer Kugel liegen keine $d+2$ Nuklei.

weitere Bezeichnungen

- *die Vereinigung aller Kanten* $E(\mathbf{y})$, wobei $\emptyset \neq E(\mathbf{y}) \subset \bar{B}$
- *die Länge aller Kanten* $L(\mathbf{y})$, wobei $0 < L(\mathbf{y}) < \infty$

Bezeichnungen

Bedingungen an den Poisson -Punktprozess

- $n(\mathbf{y}) \geq d$, wobei $n(\mathbf{y})$ *die Anzahl der Nuklei* angibt
- $\mathbf{y}$ ist *in allgemeiner quadratischer Position*, d.h. es liegen keine $k+1$ Nuklei in einem $k-1$ dim. Unterraum des $\mathbb{R}^d$, $k = 2 \ldots d$ und auf der Oberfläche einer Kugel liegen keine $d+2$ Nuklei.

weitere Bezeichnungen

- *die Vereinigung aller Kanten* $E(\mathbf{y})$, wobei $\emptyset \neq E(\mathbf{y}) \subset \bar{B}$
- *die Länge aller Kanten* $L(\mathbf{y})$, wobei $0 < L(\mathbf{y}) < \infty$

Inhaltsverzeichnis

Wiederholung
- Voronoi- und Delaunay-Mosaike
- Bezeichnungen

Modell
- Daten
- Konstruktion der Intensitätsfunktion
- Bayes Theorem
- Konstruktion des Mosaiks

Simulationsbeispiel anhand von Dachsdaten
- Bewertung des Modells

Literatur

Daten

Erfassung der Daten im Modell

$$\mathbf{x} \cap B = \mathbf{x}_B$$

wobei $\mathbf{x}$ ein Poisson Prozess auf dem $\mathbb{R}^d$ ist.

Ziel

Konstruktion der Intensitätsfunktion von $\mathbf{x}$, so dass diese in der Umgebung einer Menge $E \subset \mathbb{R}^d$ hoch ist.

Daten

Erfassung der Daten im Modell

$$\mathbf{x} \cap B = \mathbf{x}_B$$

wobei $\mathbf{x}$ ein Poisson Prozess auf dem $\mathbb{R}^d$ ist.

Ziel

Konstruktion der Intensitätsfunktion von $\mathbf{x}$, so dass diese in der Umgebung einer Menge $E \subset \mathbb{R}^d$ hoch ist.

Konstruktion der Intensitätsfunktion

$$x_i = z_i + \epsilon_i$$

- $\mathbf{z} = \{z_i\}$ ist ein inhomogener Poisson Prozess mit Intensitätsmaß $\Lambda(dz) = \rho dz$ auf der Menge E für gegebenes $\mathbf{y}$.
- ϵ_i iid ZV, unabh von $\mathbf{z}$ und $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2 I_d)$ sind *Störgrößen*

unter diesen Annahmen erhält man die Intensitätsfunktion

$$\Rightarrow \chi_E(x|\Lambda, h) = \int_E h(x-z)\Lambda(dz)$$

wobei h die Dichte von ϵ ist.

Konstruktion der Intensitätsfunktion

$$x_i = z_i + \epsilon_i$$

- $\mathbf{z} = \{z_i\}$ ist ein inhomogener Poisson Prozess mit Intensitätsmaß $\Lambda(dz) = \rho dz$ auf der Menge E für gegebenes $\mathbf{y}$.
- ϵ_i iid ZV, unabh von $\mathbf{z}$ und $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2 I_d)$ sind *Störgrößen*

unter diesen Annahmen erhält man die Intensitätsfunktion

$$\Rightarrow \chi_E(x|\Lambda, h) = \int_E h(x-z)\Lambda(dz)$$

wobei h die Dichte von ϵ ist.

Vereinfachung der Intensitätsfunktion

$$\begin{aligned}\chi_E(x|\rho,\sigma^2) &= \frac{\rho}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}}\int_E exp(-\frac{\|x-z\|^2}{2\sigma^2})dz \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-(d-1)/2}\rho\sum_{e\in E} i(\sigma^2,e,x)\end{aligned}$$

wobei $e \in E$ eine bel. Kante ist und dz das Hausdorff-Maß. Mit der orthogonalen Projektion p_e auf e und dem Satz von Pythagoras folgt die letzte Gleichung.

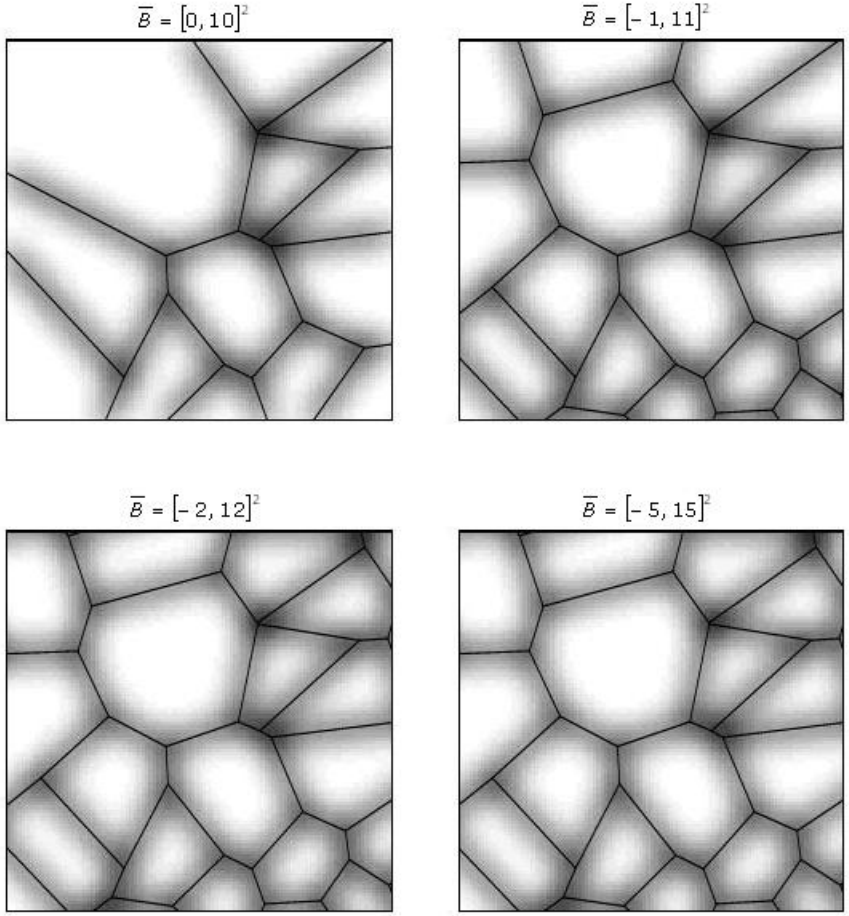


Abbildung: Plot der Intensitätsfunktion $\chi_E(x|\rho, \sigma^2)$ beschränkt auf $B = [0, 10]^2$, zu einem gegebenen Voronoi-Mosaik (erzeugt durch einen homogenen Poisson-Punktprozess mit Intensität $\lambda = 0.16$ auf $\bar{B}$) mit $\sigma = 0.4$ und $\rho = 2$.

Bayes Theorem

$$q(\theta|x_1,\ldots,x_n) \;=\; \frac{L(\theta|x_1,\ldots,x_n)q(\theta)}{f(x_1,\ldots,x_n)}$$

wobei

- $q(\theta|x_1,\ldots,x_n)$ die *a-posteriori Dichte* von θ,
- $L(\theta|x_1,\ldots,x_n)$ die *Likelihood-Funktion*,
- $q(\theta)$ die *a-priori Dichte* und
- $f(x_1,\ldots,x_n) = \int_\Theta L(\theta|x_1,\ldots,x_n)q(\theta)d\theta$ die Randdichte der Daten $(x_1,\ldots,x_n)$ ist.

Bayes Theorem

- Im Folgenden betrachten wir nur Proportionalität (keine Gleichheit)
- $f(x_1, \ldots, x_n)$ ist im Bezug auf θ eine Konstante
- Damit erhalten wir die Vereinfachung der Bayes Formel zu

$$q(\theta|x_1, \ldots, x_n) \propto L(\theta|x_1, \ldots, x_n)q(\theta)$$

Konstruktion der Likelihood-Funktion

Definition

- Die *Menge aller lokal endlichen Punktkonfigurationen* ist definiert durch

$$N_{lf} = \left\{ x \subseteq \mathbb{R}^d : \; n(x_B) < \infty, \; \forall \text{ beschränkten } B \subseteq \mathbb{R}^d \right\}$$

- die leere Punktkonfiguration wird mit $\emptyset$ bezeichnet.
- Die zugehörige σ-*Algebra* $\mathcal{N}_{lf}$ ist die kleinste σ-Algebra von Teilmengen von N_{lf}, so dass für jedes lokal endliche Zählmaß φ die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi(B)$ messbar ist $\forall$ beschränkten B

Konstruktion der Likelihood-Funktion

Definition

- Die *Menge aller lokal endlichen Punktkonfigurationen* ist definiert durch

$$N_{lf} = \left\{ x \subseteq \mathbb{R}^d : \; n(x_B) < \infty, \; \forall \text{ beschränkten } B \subseteq \mathbb{R}^d \right\}$$

- die leere Punktkonfiguration wird mit $\emptyset$ bezeichnet.
- Die zugehörige *σ-Algebra* $\mathcal{N}_{lf}$ ist die kleinste σ-Algebra von Teilmengen von N_{lf}, so dass für jedes lokal endliche Zählmaß φ die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi(B)$ messbar ist $\forall$ beschränkten B

Konstruktion der Likelihood-Funktion

- Sei $B \subset N_{lf}$ und $\bar{B}$ ein Fenster das B enthält
- $\mathbf{x}$ Poisson Prozess mit Intensitätsmaß $\mu_1(\bar{B}) = \int_{\bar{B}} \lambda_1(x)dx$
- Q Verteilung eines Poisson Prozesses mit Intensitätsmaß $\mu_2(\bar{B}) = \int_{\bar{B}} \lambda_2(x)dx$
- existiere die Dichte f von $\mathbf{x}$ bezüglich der Verteilung Q

$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{x} \in B) &= \int_B f(\{x_1 \dots x_n\}) Q(d(\{x_1 \dots x_n\})) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{exp(-\mu_2(\bar{B}))}{n!} \int_{\bar{B}} \dots \int_{\bar{B}} \mathbf{1}_B(\{x_1 \dots x_n\}) \\
&\quad f(\{x_1 \dots x_n\}) \prod_{i=1}^{n} \lambda_2(x_i) dx_1 \dots dx_n
\end{aligned}
$$

Konstruktion der Likelihood-Funktion

- Es gelte, dass $\lambda_1(x_i) > 0$ stets $\lambda_2(x_i) > 0$ impliziert,
- dann erhalten wir die Dichte $f(\mathbf{x})$ bezüglich des zweiten Poisson Prozesses

$$f(\mathbf{x}) = exp(\mu_2(\bar{B}) - \mu_1(\bar{B})) \prod_{x_i \in x} \frac{\lambda_1(x_i)}{\lambda_2(x_i)} \tag{1}$$

- wobei $i = 1, \ldots, n$ und $\mathbf{x} = \{x_1 \ldots x_n\}$

Konstruktion der Likelihood-Funktion

„full“ Likelihood

- Die Dichte von $\mathbf{x}$ bezüglich eines Poisson Prozesses mit Intensitätsfunktion $\lambda_2(x_i)$. Mit (1) erhalten wir:

$$l(\rho, \sigma^2, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \left[\prod_{x_i \in \mathbf{x}} \frac{\chi_E(x_i|\rho, \sigma^2)}{\lambda_2(x_i)}\right] exp(\mu(\bar{B}) - \rho L(\mathbf{y}))$$

- Setze $\lambda_2(x_i) = \mathbf{1}_{\bar{B}}$.

$$\Rightarrow \; l(\rho, \sigma^2, \mathbf{y}|\mathbf{x}) \propto \left[\prod_{x_i \in \mathbf{x}} \chi_E(x_i|\rho, \sigma^2)\right] exp(-\rho L(\mathbf{y}))$$

Konstruktion der Likelihood-Funktion

„full“ Likelihood

- Die Dichte von $\mathbf{x}$ bezüglich eines Poisson Prozesses mit Intensitätsfunktion $\lambda_2(x_i)$. Mit (1) erhalten wir:

$$l(\rho, \sigma^2, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \left[\prod_{x_i \in \mathbf{x}} \frac{\chi_E(x_i|\rho, \sigma^2)}{\lambda_2(x_i)}\right] exp(\mu(\bar{B}) - \rho L(\mathbf{y}))$$

- Setze $\lambda_2(x_i) = \mathbf{1}_{\bar{B}}$.

$$\Rightarrow \; l(\rho, \sigma^2, \mathbf{y}|\mathbf{x}) \propto \left[\prod_{x_i \in \mathbf{x}} \chi_E(x_i|\rho, \sigma^2)\right] exp(-\rho L(\mathbf{y}))$$

a-priori Dichten

Wir nehmen an, dass $\mathbf{y}$ ein homogener Poisson Prozess auf $\bar{B}$ ist mit Intensität λ und dass ρ, σ^2 und $\mathbf{y}$ unabhängig sind. Weiter sei:

- $\rho \sim U(0, \rho_{max}), \rho_{max} > 0$,
  d.h. ρ hat die Dichte $f_\rho(x) \propto \mathbf{1}\,[0 < x < \rho_{max}]$
- $\sigma \sim U(0, \sigma_{max}), \sigma_{max} > 0$,
  d.h. σ^2 hat die Dichte $f_{\sigma^2}(x) \propto \frac{1}{x}\mathbf{1}\,[0 < x < \sigma_{max}]$
- $\lambda \sim U(0, \lambda_{max}), \lambda_{max} > 0$,
  d.h. λ hat die Dichte $f_\lambda(x) \propto \mathbf{1}\,[0 < x < \lambda_{max}]$

a-priori Dichten

Die bedingte Dichte des Poisson Prozesses $\mathbf{y}$ auf $\bar{B}$ unter den Bedingungen λ und $n(\mathbf{y}) \geq d$ ist gegeben durch:

$$f_\lambda(\mathbf{y}|n(\mathbf{y}) \geq d) = \frac{\lambda^{n(\mathbf{y})} exp((1-\lambda)\left|\bar{B}\right|)}{1 - exp(-\lambda\left|\bar{B}\right|)\sum_{i=0}^{d-1}(\lambda\left|\bar{B}\right|)^i/i!}$$

a-posteriori Dichte

- Auf Grund der Unabhängigkeit von ρ, σ^2 und $\mathbf{y}$ gilt für die a-priori Dichte

$$f_{\rho,\sigma^2,\mathbf{y}} \;=\; f_\rho f_{\sigma^2} f_\lambda(\mathbf{y}|n(\mathbf{y}) \geq d)$$

- Das Theorem von Bayes liefert nun folgende *a-posteriori Dichte*

$$f(\rho, \sigma^2, \lambda, \mathbf{y}, \mathbf{x}_{B^c}|\mathbf{x}_B) \;\propto\; f_\rho f_{\sigma^2} f_\lambda(\mathbf{y}|n(\mathbf{y}) \geq d) l(\rho, \sigma^2 \mathbf{y}|\mathbf{x})$$

Markov-Ketten-Monte-Carlo Simulation

Metropolis-Hastings Algorithmus

Der *Metropolis-Hastings Algorithmus* ist ein Algorithmus zur Erzeugung einer Markov-Kette X_n:

- *1. Schritt*: Initialisiere X_0 und setze $n = 0$
- *2. Schritt*: erzeuge einen Kandidaten Y mit vorgegebener Verteilung $q(\cdot|X_n)$
- *3. Schritt*: akzeptiere Y mit Wahrscheinlichkeit $\alpha(X_n, Y) = min\left\{1, \frac{f(Y)q(X_n|Y)}{f(X_n)q(Y|X_n)}\right\}$
- *4. Schritt*: erzeuge eine ZV $U \sim U(0,1)$:
  falls $U \leq \alpha$ wird Y akzeptiert, d.h. setze $X_{n+1} = Y$
  ansonsten setze $X_{n+1} = X_n$

Markov-Ketten-Monte-Carlo Simulation

Metropolis-Hastings Algorithmus

Der *Metropolis-Hastings Algorithmus* ist ein Algorithmus zur Erzeugung einer Markov-Kette X_n:

- *1. Schritt*: Initialisiere X_0 und setze $n = 0$
- *2. Schritt*: erzeuge einen Kandidaten Y mit vorgegebener Verteilung $q(\cdot|X_n)$
- *3. Schritt*: akzeptiere Y mit Wahrscheinlichkeit $\alpha(X_n, Y) = min\left\{1, \frac{f(Y)q(X_n|Y)}{f(X_n)q(Y|X_n)}\right\}$
- *4. Schritt*: erzeuge eine ZV $U \sim U(0,1)$: falls $U \leq \alpha$ wird Y akzeptiert, d.h. setze $X_{n+1} = Y$ ansonsten setze $X_{n+1} = X_n$

Markov-Ketten-Monte-Carlo Simulation

Metropolis-Hastings Algorithmus

Der *Metropolis-Hastings Algorithmus* ist ein Algorithmus zur Erzeugung einer Markov-Kette X_n:

- *1. Schritt*: Initialisiere X_0 und setze $n = 0$
- *2. Schritt*: erzeuge einen Kandidaten Y mit vorgegebener Verteilung $q(\cdot|X_n)$
- *3. Schritt*: akzeptiere Y mit Wahrscheinlichkeit $\alpha(X_n, Y) = min\left\{1, \frac{f(Y)q(X_n|Y)}{f(X_n)q(Y|X_n)}\right\}$
- *4. Schritt*: erzeuge eine ZV $U \sim U(0,1)$:
  falls $U \leq \alpha$ wird Y akzeptiert, d.h. setze $X_{n+1} = Y$
  ansonsten setze $X_{n+1} = X_n$

Markov-Ketten-Monte-Carlo Simulation

Metropolis-Hastings Algorithmus

Der *Metropolis-Hastings Algorithmus* ist ein Algorithmus zur Erzeugung einer Markov-Kette X_n:

- *1. Schritt*: Initialisiere X_0 und setze $n = 0$
- *2. Schritt*: erzeuge einen Kandidaten Y mit vorgegebener Verteilung $q(\cdot|X_n)$
- *3. Schritt*: akzeptiere Y mit Wahrscheinlichkeit $\alpha(X_n, Y) = min\left\{1, \frac{f(Y)q(X_n|Y)}{f(X_n)q(Y|X_n)}\right\}$
- *4. Schritt*: erzeuge eine ZV $U \sim U(0,1)$:
  falls $U \leq \alpha$ wird Y akzeptiert, d.h. setze $X_{n+1} = Y$
  ansonsten setze $X_{n+1} = X_n$

Updates der einzelnen Parameter

- Ein Zustand der Markov-Kette besteht aus dem Parameter-Tupel
$$(\rho, \sigma^2, \lambda, \mathbf{y}, \mathbf{x}_{B^c})$$
- Um in den nächsten Zustand zu gelangen erfolgt für jeden Parameter einzeln ein Update.
- Auf die einzelnen Updates wollen wir an dieser Stelle nicht näher eingehen, mit einer Ausnahme:

Updates für **y**

Es gibt drei mögliche Updates für **y**:

- Vorschlag für die Geburt eines Punktes mit Geburtswahrscheinlichkeit q
- Vorschlag für den Tod eines Punktes mit Sterbewahrscheinlichkeit q
- Vorschlag für die Bewegung eines Punktes, d.h. Geburt und Tod gleichzeitig, mit Wahrscheinlichkeit $1 - 2q$

wobei $0 < q \leq 0.5$ beliebig aber fest vorgegeben.

Vorschlag für die Geburt eines Punktes

- $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y} \cup \{\xi\}$
- Punkt ξ wird gleichverteilt auf $\bar{B}$ zu dem Poisson Prozess $\mathbf{y}$ hinzugefügt.
- Der neu entstandene Poisson Prozess wird mit Wahrscheinlichkeit $min\{1, H(\mathbf{y};\xi)\}$ akzeptiert, wobei

$$H(\mathbf{y};\xi) = \frac{\lambda\left|\bar{B}\right|}{n(\mathbf{y})+1}\left[\prod_{x_i\in\mathbf{x}}\frac{\chi_{E(\mathbf{y}\cup\{\xi\})}(x_i|\rho,\sigma^2)}{\chi_{E(\mathbf{y})}(x_i|\rho,\sigma^2)}\right] exp(\rho(L(\mathbf{y})-L(\mathbf{y}\cup\{\xi\})))$$

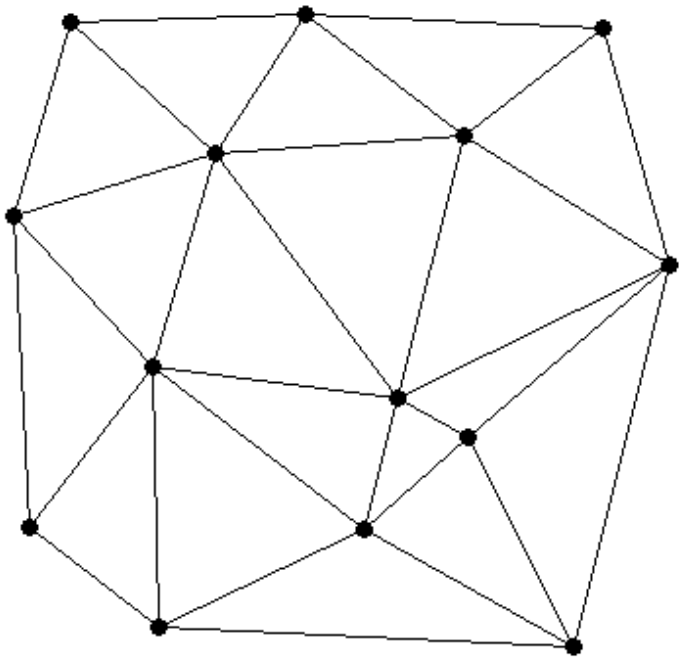
Vorschlag für den Tod eines Punktes

- $\mathbf{y} \to \mathbf{y} \setminus \{\eta\}$
- Ein Punkt η wird gleichverteilt von $\mathbf{y}$ ausgewählt und gelöscht.
- Der neue entstandene Poisson Prozess wird mit Wahrscheinlichkeit $min\left\{1, \frac{1}{H(\mathbf{y}\setminus\{\eta\};\eta)}\right\}$ akzeptiert.

Vorschlag für die Bewegung eines Punktes

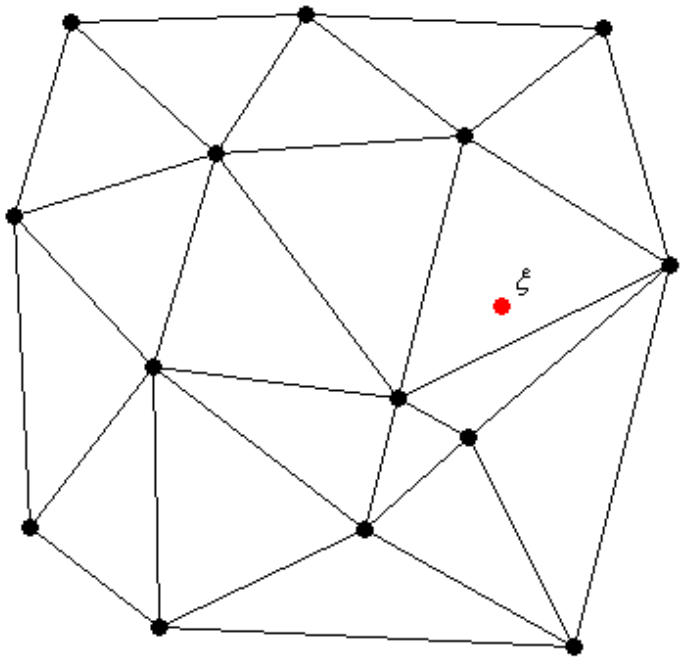
- $\mathbf{y} \to (\mathbf{y} \setminus \{\eta\}) \cup \{\xi\}$
- η wird gleichverteilt aus $\mathbf{y}$ ausgewählt und durch ξ ersetzt, wobei ξ d-dim. normalverteilt um den erwarteten Punkt η.
- Die Akzeptanzwahrscheinlichkeit des neuen Poisson Prozesses ist 0, falls $\xi \notin \bar{B}$ und $min\left\{1, \frac{H(\mathbf{y}\setminus\{\xi\};\eta)}{H(\mathbf{y}\setminus\{\eta\};\xi)}\right\}$ sonst.

Konstruktion des Voronoi-Mosaiks



- Der Einfachheit halber konstruieren wir ein Delaunay-Mosaik und erhalten damit auch das Voronoi-Mosaik

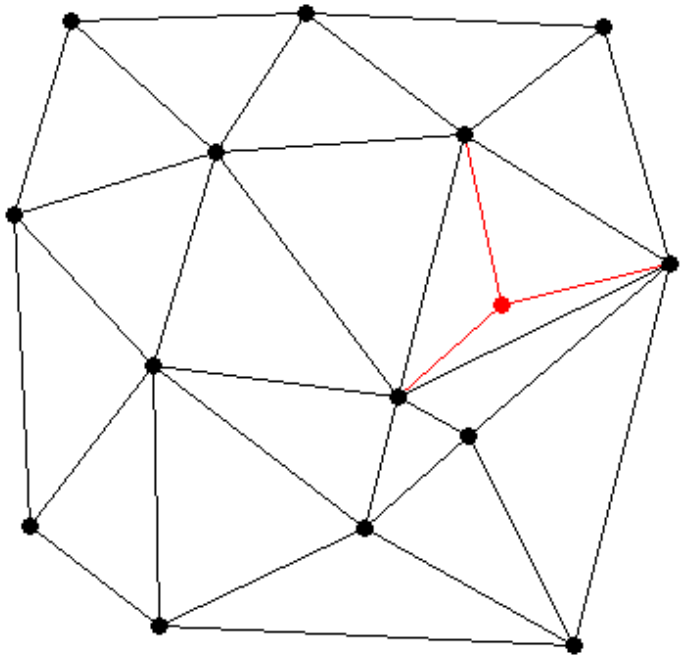
Konstruktion des Voronoi-Mosaiks



Geburtsvorschlag eines Punktes

- Ein neuer Punkt ξ wird gleichverteilt in das Mosaik eingefügt
- Finde die Zelle, die ξ enthält

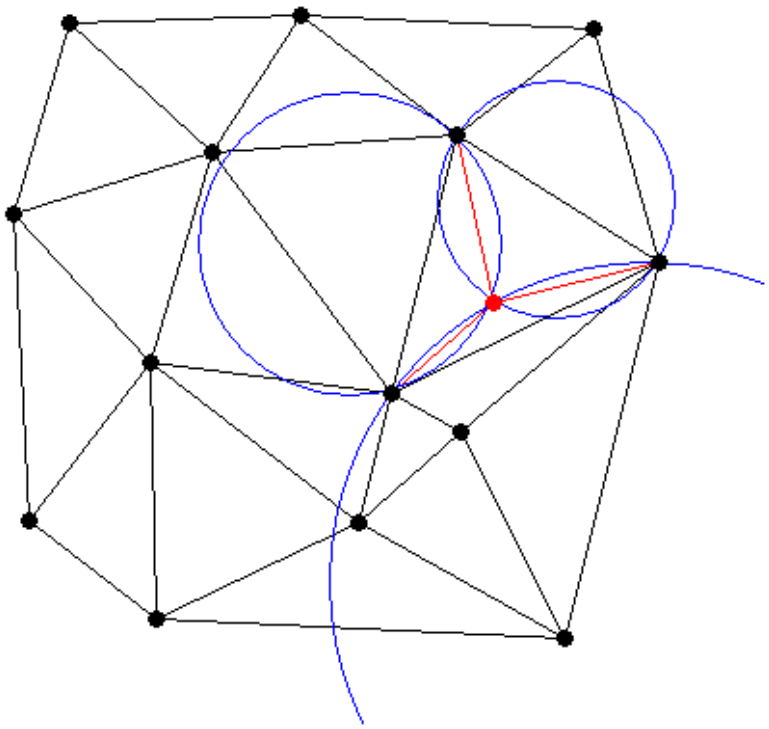
Konstruktion des Voronoi-Mosaiks



Geburtsvorschlag eines Punktes

- Verbinde ξ mit allen Eckpunkten der Zelle, die ξ enthält

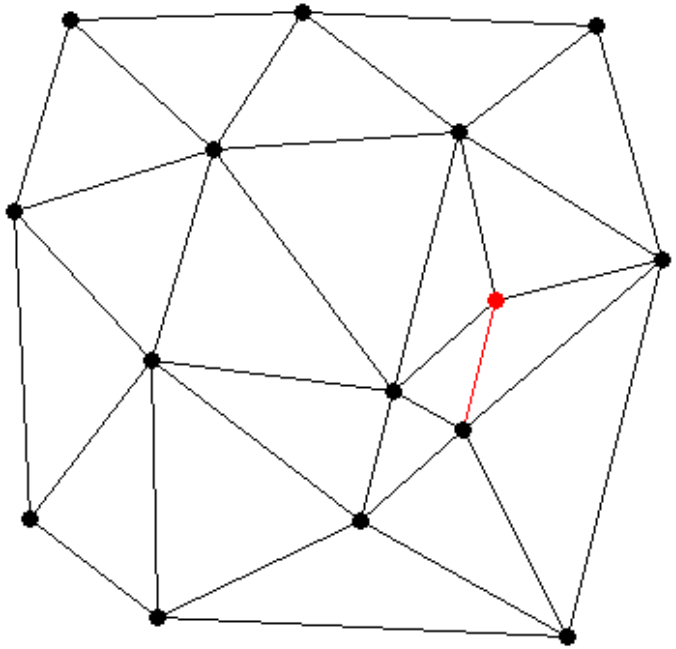
Konstruktion des Voronoi-Mosaiks



Geburtsvorschlag eines Punktes

- Überprüfe, ob die drei neu entstandenen Zellen die Umkreiseigenschaft erfüllen
- Falls nicht alle drei Zellen diese erfüllen folgen *Flip Operationen*

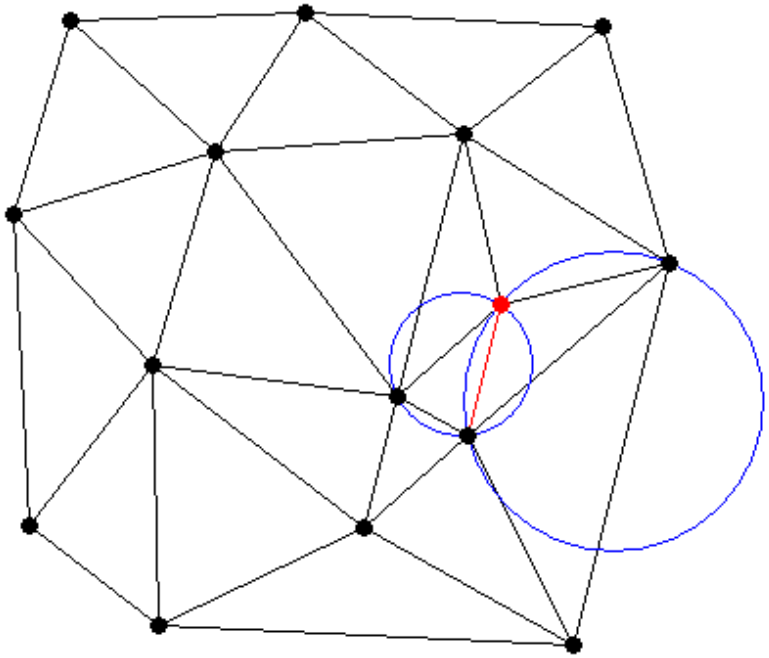
Konstruktion des Voronoi-Mosaiks



Geburtsvorschlag eines Punktes

- Durch Kanten-Flip Operationen entstehen zwei neue Zellen

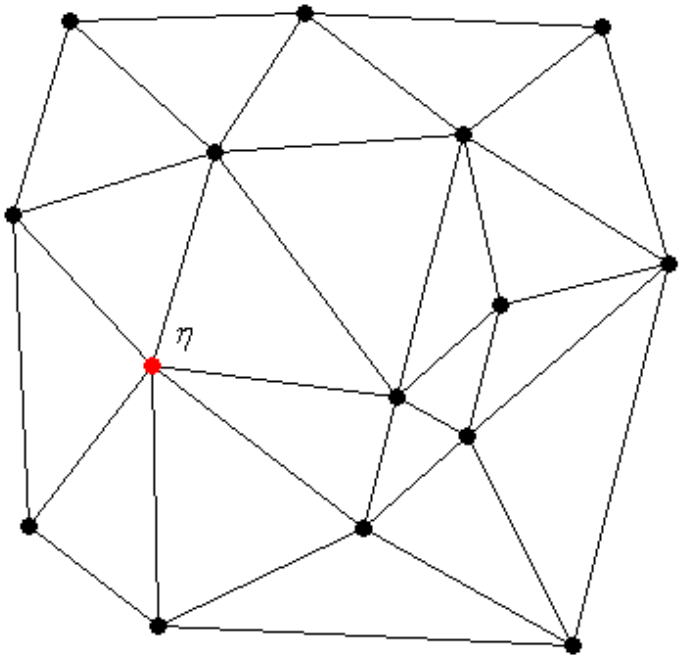
Konstruktion des Voronoi-Mosaiks



Geburtsvorschlag eines Punktes

- Überprüfe die neu entstandenen Zellen auf die Umkreiseigenschaft
- Ist diese nicht erfüllt folgen weitere Flip Operationen

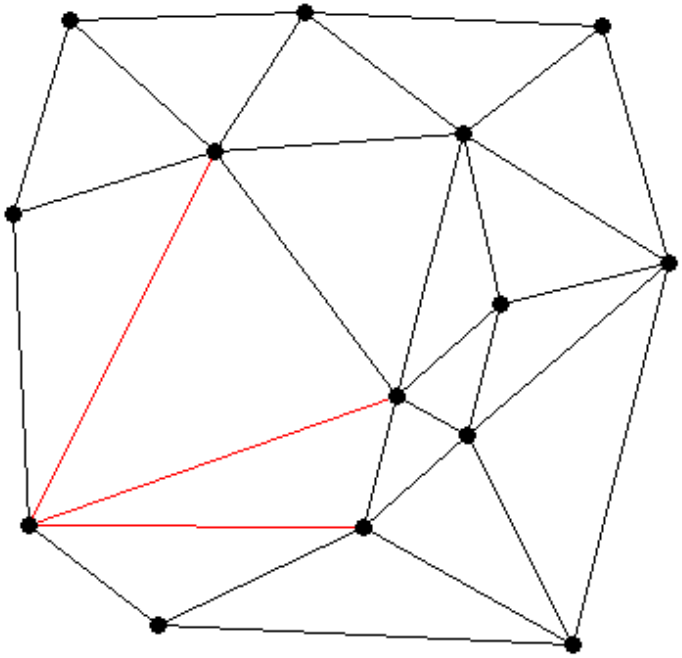
Konstruktion des Voronoi-Mosaiks



Todesvorschlag eines Punktes

- Ein Punkt η wird gleichverteilt aus den Nuklei gewählt und verworfen
- Jetzt folgen Kanten-Flip Operationen in umgekehrter Reihenfolge zum Geburts-Prozess

Konstruktion des Voronoi-Mosaiks



Todesvorschlag eines Punktes

- Überprüfe wiederum ob die Umkreiseigenschaft aller Zellen erfüllt ist
- Falls $n(\mathbf{y} \setminus \{\eta\}) < d$ wird das neue Mosaik nicht akzeptiert, d.h. das Mosaik bleibt unverändert

Inhaltsverzeichnis

Wiederholung
- Voronoi- und Delaunay-Mosaike
- Bezeichnungen

Modell
- Daten
- Konstruktion der Intensitätsfunktion
- Bayes Theorem
- Konstruktion des Mosaiks

Simulationsbeispiel anhand von Dachsdaten
- Bewertung des Modells

Literatur

Beispiel: Rekonstruktion von Dachsgebieten

- Tiergebiete werden oft durch Voronoi-Mosaike modelliert.
- Dieses Beispiel handelt von der Rekonstruierung der Dachsgebiete durch Latrinenpositionen unter der Annahme, dass die Dachse ihre Latrinen in der Nähe der Grenze ihres Gebietes bauen.
- Der Datensatz enthält 124 Latrinenorte, die in Vythan Woods, Oxford, UK beobachtet worden sind.

A-priori-Verteilung

- λ, ρ, σ^2 seien unabhängig und identisch verteilt.
- $\rho \sim U(0, 1000)$
- $\sigma \sim U(0, 1000)$
- $\lambda \sim U(0, 1000)$
- Die Anzahl der generierten Punkte im Voronoi-Mosaik sei unbekannt, d.h. die Anzahl der Dachsgebiete ist unbekannt.
- $B = [0, 10]^2$

Realisation des Voronoi Mosaiks nach verschiedenen Iterationsschritten

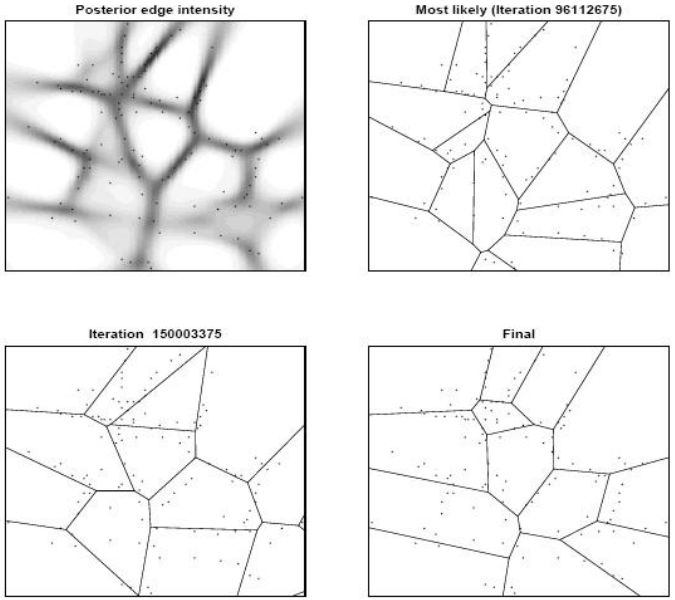


Abbildung: Bild 1: a-posteriori-Kanten-Intensität mit den Dachsdaten. Bild 2: Voronoi-Mosaik nach Iterationsschritt 96.112.675. Bild 3: Voronoi-Mosaik nach Iterationsschritt 150.003.375. Bild 4: Voronoi-Mosaik nach Iterationsschritt 201.000.000.

Trace-plots

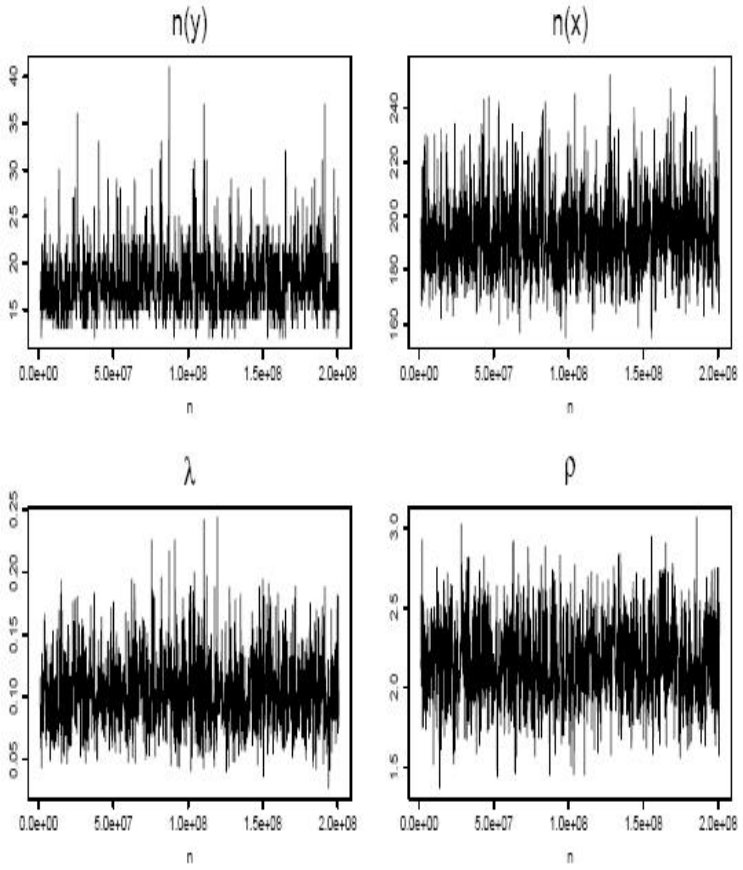


Abbildung: Trace-plots von $n(\mathbf{y})$, $n(\mathbf{x})$, λ, ρ als Funktion der Iterationszahl.

Vergleich der beobachteten Dachsdaten mit den realisierten Daten

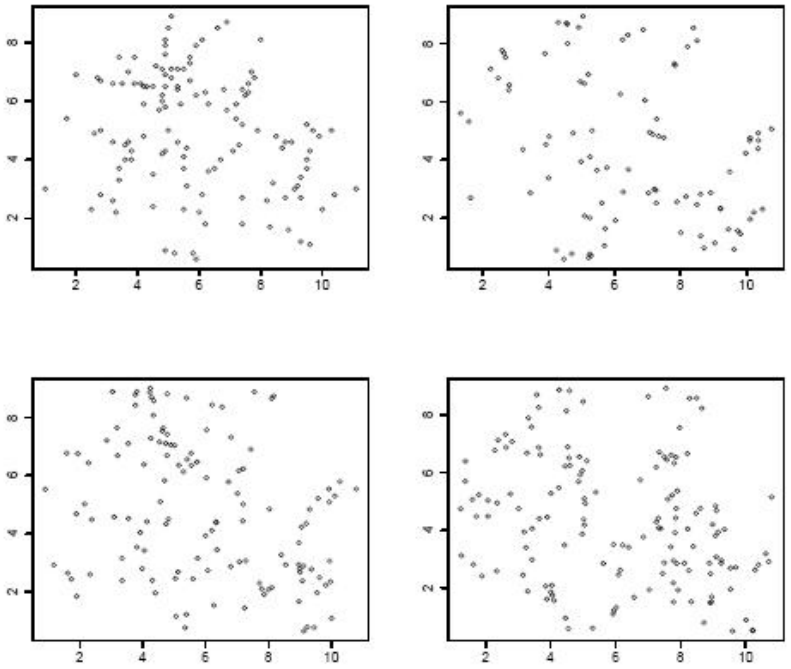


Abbildung: oben links: Dachsdaten. Restliche drei Bilder: Realisierung der Daten mit Hilfe der a-posteriori-Verteilung

Ripley's K-Funktion

$K : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit

$$„\lambda K(r) = \mathbb{E}\left[\Phi(b(0, r)) \setminus \{0\} \,|0\right]“$$

wobei $r \geq 0$, Φ Punktprozess
$\Rightarrow$ falls Φ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität λ ist gilt:

$$\lambda K(r) = \lambda \pi r^2$$

L-Funktion

$L : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit

$$L(r) = \sqrt{\frac{K(r)}{\pi}}$$

, $r \geq 0$
$\Rightarrow$ falls Φ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität λ ist gilt:

$$L(r) = r$$

Plot von $\hat{L}(r) - r$

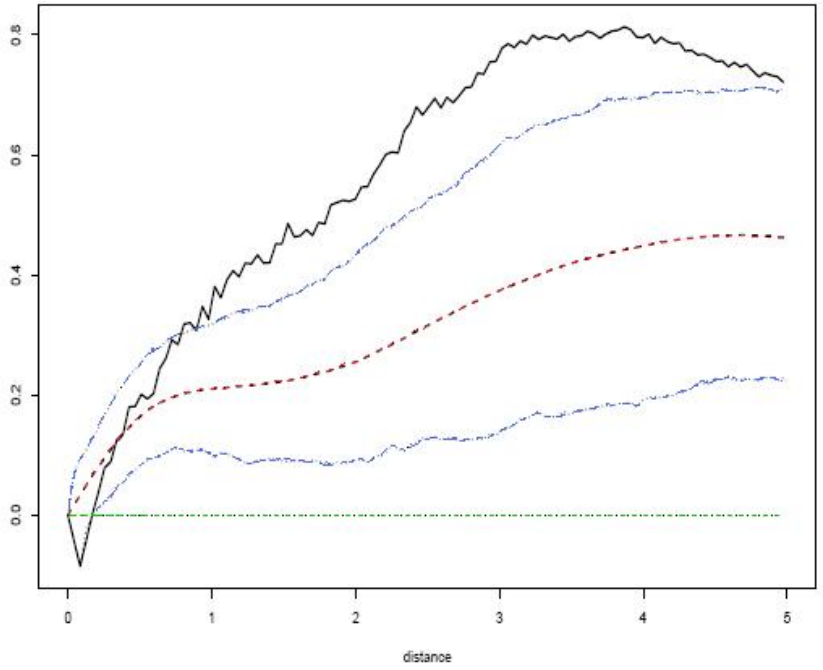


Abbildung: Plot von $\hat{L}(r) - r$ als Funktion des Abstandes. Schwarze Linie: beobachtete Daten, gestrichelte Linie: Durchschnittswert von $\hat{L}(r) - r$, blaue Linie: dazugehörige 2.5% Quantile, gepunktete Linie: Poisson-Fall.

Fazit

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass unser Modell die Realität nicht vollständig erfasst. Die Abweichungen kommen daher, dass wir nur sehr wenig Informationen haben und vieles auf Annahmen aufbaut.
Trotzdem wird dieses Modell auch in anderen Gebieten angewandt, z.B. in der Kosmologie, um die räumliche Verteilung der Galaxien zu untersuchen.

Literatur

- O. Skare, J. Møller, E. Vedel Jensen: *Bayesian analysis of spatial point processes in the neighbourhood of Voronoi networks*
- J. Møller, R. Waagepetersen: *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*
- Prof. Dr. V. Schmidt: Vorlesungsskript WS 2007/08 *Räumliche Statistik*
- W. Gilks, S. Richards, D. Spiegelhalter: *Markov Chain Monte Carlo in Practice*
- Internet: www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ws03_04/seminar03_04/vortrag_rt.pdf