

Extrapolation und Interpolation von räumlichen Mustern

Daniela Giesinger, Istvan Nagy

01. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

- 1 **Einleitung**
 - Interpolation
 - Extrapolation
 - Beispiel: Mammutbaumsetzlinge
- 2 **Modell**
 - Grundlagen
 - Keim-Korn-Modell
 - Clusterprozesse
 - Cox-Clusterprozess
- 3 **Bayes'sche Clusteranalyse**
 - Räumliche Geburts- und Todesprozesse
 - Adaptive Coupling from the Past - Algorithmus
- 4 **Literaturverzeichnis**

Übersicht

Interpolation von räumlichen Prozessen

Anwendungsbeispiele

Übersicht

Interpolation von räumlichen Prozessen

Anwendungsbeispiele

- Bildbearbeitung: Ersetzen eines Objektes im Vordergrund durch Hintergrundtextur

Übersicht

Interpolation von räumlichen Prozessen

Anwendungsbeispiele

- Bildbearbeitung: Ersetzen eines Objektes im Vordergrund durch Hintergrundtextur
- Simulation von Ölvorkommen mit Daten aus Probebohrungen

Übersicht

Interpolation von räumlichen Prozessen

Anwendungsbeispiele

- Bildbearbeitung: Ersetzen eines Objektes im Vordergrund durch Hintergrundtextur
- Simulation von Ölvorkommen mit Daten aus Probebohrungen
- Vorhersage von Messungen wie Niederschläge / Luftverschmutzung

Übersicht

Interpolation von räumlichen Prozessen

Anwendungsbeispiele

- Bildbearbeitung: Ersetzen eines Objektes im Vordergrund durch Hintergrundtextur
- Simulation von Ölvorkommen mit Daten aus Probebohrungen
- Vorhersage von Messungen wie Niederschläge / Luftverschmutzung
- Wiederherstellung gelöschter Information in Mustern

Übersicht

Interpolation von räumlichen Prozessen

Anwendungsbeispiele

- Bildbearbeitung: Ersetzen eines Objektes im Vordergrund durch Hintergrundtextur
- Simulation von Ölvorkommen mit Daten aus Probebohrungen
- Vorhersage von Messungen wie Niederschläge / Luftverschmutzung
- Wiederherstellung gelöschter Information in Mustern
- Simulation von unbeobachtbaren Teilbereichen von Mustern

Übersicht

Extrapolation von räumlichen Prozessen

Erweiterung einer Stichprobe über das beobachtete Fenster hinaus;
Anwendungsbeispiele

Übersicht

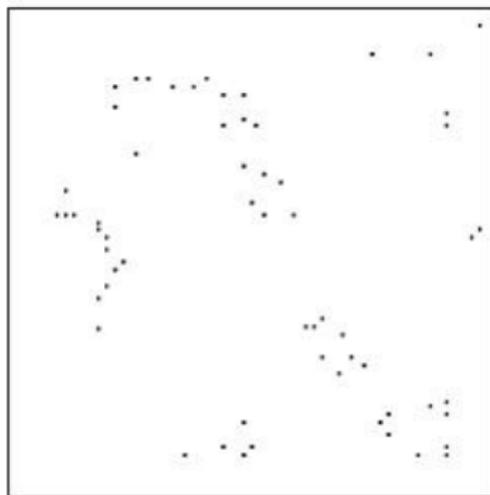
Extrapolation von räumlichen Prozessen

Erweiterung einer Stichprobe über das beobachtete Fenster hinaus;
Anwendungsbeispiele

- Niederschläge
- Ölvorkommen

Beispiel: Mammutbaumsetzlinge

- Quadrat 23x23 Meter
- 62 Mammutbaumsetzlinge
- Gesucht: Anzahl, Lage der Elternbäume



Contents

- 1 Einleitung
 - Interpolation
 - Extrapolation
 - Beispiel: Mammutbaumsetzlinge
- 2 Modell
 - Grundlagen
 - Keim-Korn-Modell
 - Clusterprozesse
 - Cox-Clusterprozess
- 3 Bayes'sche Clusteranalyse
 - Räumliche Geburts- und Todesprozesse
 - Adaptive Coupling from the Past - Algorithmus
- 4 Literaturverzeichnis

Modell

Das Modell

Modell

Das Modell

- räumliches Muster U im \mathbb{R}^d ($d = 2,3$)

Modell

Das Modell

- räumliches Muster U im \mathbb{R}^d ($d = 2,3$)
- U besitzt parametrische Verteilung, Parameter $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$

Modell

Das Modell

- räumliches Muster U im \mathbb{R}^d ($d = 2,3$)
- U besitzt parametrische Verteilung, Parameter $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$
- Beobachtung: $\mathbf{y} = U \cap A$

Modell

Das Modell

- räumliches Muster U im \mathbb{R}^d ($d = 2,3$)
- U besitzt parametrische Verteilung, Parameter $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$
- Beobachtung: $\mathbf{y} = U \cap A$
- A : Beobachtungsfenster (kompakte Teilmenge)

Definitionen

Definition (Zufälliger Punktprozess)

Eine Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvektoren $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \infty$ wird *zufälliger Punktprozess* im \mathbb{R}^d genannt, wenn

$$N = \# \{n : X_n \in B\} < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$$

Definitionen

Definition (Zufälliger Punktprozess)

Eine Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvektoren $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \infty$ wird *zufälliger Punktprozess* im \mathbb{R}^d genannt, wenn

$$N = \# \{n : X_n \in B\} < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$$

Definition (stationärer Punktprozess)

$\Phi = \{X_n\}$ Punktprozess heißt *stationär*, wenn

$$\mathbb{P}(\Phi \in A) = \mathbb{P}(\Phi_y \in A) \quad \forall A \in \mathcal{N}$$

mit $\Phi_y = \{x + y; x \in \Phi\} \quad \forall y \in \mathbb{R}^d$

und $\mathcal{N} : \sigma$ -Algebra auf der Menge der lokal endlichen Punktmuster

Definitionen

Definition (markierter Punktprozess, Marke, Markenraum)

- Punktprozess $\{X_n\}$
- Folge $\{Z_n\}$ von Zufallsvariablen mit $Z_n : \Omega \rightarrow M$, die ihre Werte in einem messbaren Raum (M, \mathcal{M}) annehmen.
- $\{Z_n\}$ heißt *Marke*
- M heißt *Markenraum*
- Die Folge $\{(X_n, Z_n)\}$ heißt *(zufälliger) markierter Punktprozess*

Das Keim-Korn-Modell

Das Keim-Korn-Modell

Ein Keim-Korn-Prozess ist ein stationärer markierter Punktprozess

$$W = \{(X_n, Z_n)\}_{n \in I} \text{ im } \mathbb{R}^d$$

Das Keim-Korn-Modell

Das Keim-Korn-Modell

Ein Keim-Korn-Prozess ist ein stationärer markierter Punktprozess

$$W = \{(X_n, Z_n)\}_{n \in I} \text{ im } \mathbb{R}^d$$

- Keime: Punktprozess $\{X_n\}$ im \mathbb{R}^d

Das Keim-Korn-Modell

Das Keim-Korn-Modell

Ein Keim-Korn-Prozess ist ein stationärer markierter Punktprozess

$W = \{(X_n, Z_n)\}_{n \in I}$ im \mathbb{R}^d

- Keime: Punktprozess $\{X_n\}$ im \mathbb{R}^d
- Körner: Marken, die ihre Werte in der Familie der kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d annehmen $Z_n \subset \mathbb{R}^d$

Das Keim-Korn-Modell

Das Keim-Korn-Modell

Ein Keim-Korn-Prozess ist ein stationärer markierter Punktprozess

$W = \{(X_n, Z_n)\}_{n \in I}$ im \mathbb{R}^d

- Keime: Punktprozess $\{X_n\}$ im \mathbb{R}^d
- Körner: Marken, die ihre Werte in der Familie der kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d annehmen $Z_n \subset \mathbb{R}^d$
- Jeder Keim ist zu einem Korn assoziiert

Das Keim-Korn-Modell

Das Keim-Korn-Modell

Ein Keim-Korn-Prozess ist ein stationärer markierter Punktprozess

$W = \{(X_n, Z_n)\}_{n \in I}$ im \mathbb{R}^d

- Keime: Punktprozess $\{X_n\}$ im \mathbb{R}^d
- Körner: Marken, die ihre Werte in der Familie der kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d annehmen $Z_n \subset \mathbb{R}^d$
- Jeder Keim ist zu einem Korn assoziiert
- Die Körner sind zentriert (mit ihrem Schwerpunkt bzw. einem anderen ausgezeichneten Punkt) auf den Nullpunkt

Das Keim-Korn-Modell

Das Keim-Korn-Modell

Ein Keim-Korn-Prozess ist ein stationärer markierter Punktprozess

$W = \{(X_n, Z_n)\}_{n \in I}$ im \mathbb{R}^d

- Keime: Punktprozess $\{X_n\}$ im \mathbb{R}^d
- Körner: Marken, die ihre Werte in der Familie der kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d annehmen $Z_n \subset \mathbb{R}^d$
- Jeder Keim ist zu einem Korn assoziiert
- Die Körner sind zentriert (mit ihrem Schwerpunkt bzw. einem anderen ausgezeichneten Punkt) auf den Nullpunkt
- Bsp: Z_n ist Kugel um den Nullpunkt

Das Keim-Korn-Modell

Das Keim-Korn-Modell

Ein Keim-Korn-Prozess ist ein stationärer markierter Punktprozess

$W = \{(X_n, Z_n)\}_{n \in I}$ im \mathbb{R}^d

- Keime: Punktprozess $\{X_n\}$ im \mathbb{R}^d
- Körner: Marken, die ihre Werte in der Familie der kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d annehmen $Z_n \subset \mathbb{R}^d$
- Jeder Keim ist zu einem Korn assoziiert
- Die Körner sind zentriert (mit ihrem Schwerpunkt bzw. einem anderen ausgezeichneten Punkt) auf den Nullpunkt
- Bsp: Z_n ist Kugel um den Nullpunkt
- Die Vereinigung aller Paare

$U = \bigcup_{n \in I} (X_n + Z_n)$ bezeichnet man als *Keim-Korn-Modell*

Das Keim-Korn-Modell

Beispiel: Realisierung eines Keim-Korn-Modells mit kreisförmigen Körnern



Clusterprozess

Clusterprozess

Clusterprozess

Clusterprozess

- Elternprozess $\Phi_e = \{X_n\}$

Clusterprozess

Clusterprozess

- Elternprozess $\Phi_e = \{X_n\}$
- Zu jeden Punkt $X_n \in \Phi_e$: weiterer Punktprozess Φ_{X_n}
(Nachkommenprozess)

Clusterprozess

Clusterprozess

- Elternprozess $\Phi_e = \{X_n\}$
- Zu jeden Punkt $X_n \in \Phi_e$: weiterer Punktprozess Φ_{X_n} (Nachkommenprozess)
- Clusterprozess:

$$\Phi = \bigcup_{X_n \in \Phi_e} \Phi_{X_n}$$

Keim-Korn-Modell als Clusterprozess

Keim-Korn-Modell als Clusterprozess

Keim-Korn-Modell als Clusterprozess

Keim-Korn-Modell als Clusterprozess

Man kann Keim-Korn-Modelle als Clusterprozesse beschreiben mit

- X_n : Eltern / Clustermittelpunkte
- $X_n + Z_n$: Nachkommen von X_n / Cluster um X_n
- $U = \bigcup_{n \in I} (X_n + Z_n)$: Clusterprozess

Keim-Korn-Modell als Clusterprozess

Keim-Korn-Modell als Clusterprozess

Man kann Keim-Korn-Modelle als Clusterprozesse beschreiben mit

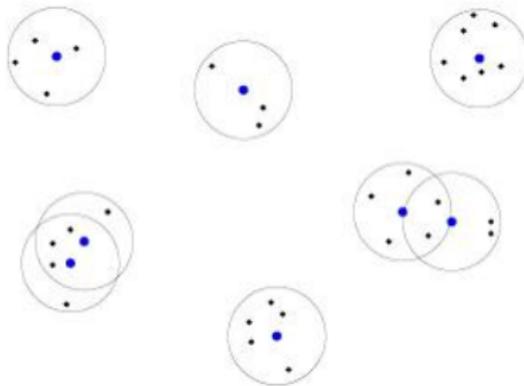
- X_n : Eltern / Clustermittelpunkte
- $X_n + Z_n$: Nachkommen von X_n / Cluster um X_n
- $U = \bigcup_{n \in I} (X_n + Z_n)$: Clusterprozess

In der Praxis: Betrachtung von Durchschnitt $y = U \cap A$ von U mit einer kompakten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ (A ist i.A. festgelegt und bekannt)

Nomenklatur für Clusterprozesse

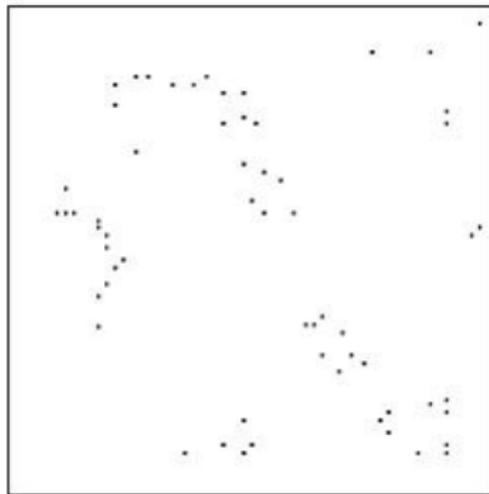
Elternprozess	Nachkommen	Bezeichnung
beliebig	beliebig	Cluster-Prozess
Poisson	beliebig	Poisson Cluster Prozess
<u>beliebig</u>	<u>Poisson</u>	<u>Cox Cluster Prozess</u>
Poisson	Poisson	Neyman-Scott Prozess
Poisson	Poisson	Matérn Cluster Prozess
	(homogen)	
homogen Poisson	Poisson (Gauß)	modifizierter Thomas Prozess

Beispiel: Matérn-Clusterprozess



Beispiel: Mammutbaumsetzlinge

- Quadrat 23x23 Meter
- 62 Mammutbaumsetzlinge
- Gesucht: Anzahl, Lage der Elternbäume



Cox-Clusterprozess

Modellierung der Daten als Cox-Clusterprozess

- Elternprozess $\{X_n\}_{n \in I} \in \mathbb{R}^d$
- Korn Z_n : Nachkommen eines Punktes x_n bezogen auf den Ursprung

Cox-Clusterprozess

Modellierung der Daten als Cox-Clusterprozess

- Elternprozess $\{X_n\}_{n \in I} \in \mathbb{R}^d$
- Korn Z_n : Nachkommen eines Punktes x_n bezogen auf den Ursprung
- Z_n : Realisierung eines inhomogenen Poisson-Punkt-Prozesses mit Intensitätsfunktion $h(\cdot + x_n | x_n) : \chi \rightarrow [0, \infty)$ mit $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$

Cox-Clusterprozess

Modellierung der Daten als Cox-Clusterprozess

- Elternprozess $\{X_n\}_{n \in I} \in \mathbb{R}^d$
- Korn Z_n : Nachkommen eines Punktes x_n bezogen auf den Ursprung
- Z_n : Realisierung eines inhomogenen Poisson-Punkt-Prozesses mit Intensitätsfunktion $h(\cdot + x_n | x_n) : \chi \rightarrow [0, \infty)$ mit $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$
- Modellierung von Ausreißern durch Poisson-Punkt-Prozess: „dummy Elternteil“ x_0 mit Intensität: $h(\cdot | x_0) = \epsilon; \epsilon > 0$

Cox-Clusterprozess

Modellierung der Daten als Cox-Clusterprozess

- Elternprozess $\{X_n\}_{n \in I} \in \mathbb{R}^d$
- Korn Z_n : Nachkommen eines Punktes x_n bezogen auf den Ursprung
- Z_n : Realisierung eines inhomogenen Poisson-Punkt-Prozesses mit Intensitätsfunktion $h(\cdot + x_n | x_n) : \chi \rightarrow [0, \infty)$ mit $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$
- Modellierung von Ausreißern durch Poisson-Punkt-Prozess: „dummy Elternteil“ x_0 mit Intensität: $h(\cdot | x_0) = \epsilon; \epsilon > 0$
- Nachkommen formen gemeinsam Poisson-Punkt-Prozess mit Intensitätsfunktion $\lambda(\cdot | x) = \epsilon + \sum_{i=1}^n h(\cdot | x_i)$.

Contents

- 1 Einleitung
 - Interpolation
 - Extrapolation
 - Beispiel: Mammutbaumsetzlinge
- 2 Modell
 - Grundlagen
 - Keim-Korn-Modell
 - Clusterprozesse
 - Cox-Clusterprozess
- 3 Bayes'sche Clusteranalyse
 - Räumliche Geburts- und Todesprozesse
 - Adaptive Coupling from the Past - Algorithmus
- 4 Literaturverzeichnis

Räumliche Geburts- und Todesprozesse

Allgemein:

- Markovketten-Monte-Carlo-Technik

Räumliche Geburts- und Todesprozesse

Allgemein:

- Markovketten-Monte-Carlo-Technik
- Betrachtung einer Punktmenge

Räumliche Geburts- und Todesprozesse

Allgemein:

- Markovketten-Monte-Carlo-Technik
- Betrachtung einer Punktmenge
- Mit einer gewissen Wkt. wird eine Geburt (Hinzunahme eines Punktes) oder ein Tod (Löschen eines Punktes) „vorgeschlagen“

Räumliche Geburts- und Todesprozesse

Allgemein:

- Markovketten-Monte-Carlo-Technik
- Betrachtung einer Punktmenge
- Mit einer gewissen Wkt. wird eine Geburt (Hinzunahme eines Punktes) oder ein Tod (Löschen eines Punktes) „vorgeschlagen“
- Diese treten mit gewissen Wkten ein (Geburts- / Todesrate)

Räumliche Geburts- und Todesprozesse

- Ziel in unserem Fall: Stichprobenerhebung aus der Verteilung von W bei gegebenen Daten y

Räumliche Geburts- und Todesprozesse

- Ziel in unserem Fall: Stichprobenerhebung aus der Verteilung von W bei gegebenen Daten y
- Übergänge des Prozesses:

Räumliche Geburts- und Todesprozesse

- Ziel in unserem Fall: Stichprobenerhebung aus der Verteilung von W bei gegebenen Daten y
- Übergänge des Prozesses:
 - Geburt: ein (Eltern-)Punkt kommt hinzu
 - Geburtsrate: $b(x, \xi) = \lambda_X(\xi; x) \left[1 + \sum_{j=1}^m \frac{h(y_j | \xi)}{\epsilon} \right]$,
mit $\lambda_X(\xi; x) = \frac{p_X(x \cup \{\xi\})}{p_X(x)}$

Räumliche Geburts- und Todesprozesse

- Ziel in unserem Fall: Stichprobenerhebung aus der Verteilung von W bei gegebenen Daten y
- Übergänge des Prozesses:
 - Geburt: ein (Eltern-)Punkt kommt hinzu
 - Geburtsrate: $b(x, \xi) = \lambda_X(\xi; x) \left[1 + \sum_{j=1}^m \frac{h(y_j|\xi)}{\epsilon} \right]$,
 mit $\lambda_X(\xi; x) = \frac{p_{X}(x \cup \{\xi\})}{p_X(x)}$
 - Tod: ein (Eltern-)Punkt wird gelöscht
 - Todesrate: $d(x \cup \{\xi\}, \xi) = \frac{\exp\left[\int_{\mathcal{A}} (h(a|\xi)) da\right]}{\prod_{j=1}^m \left[1 + \frac{h(y_j|\xi)}{\lambda(y_j|\xi)} \right]} \left[1 + \sum_{j=1}^m \frac{h(y_j|\xi)}{\epsilon} \right]$

Räumliche Geburts- und Todesprozesse

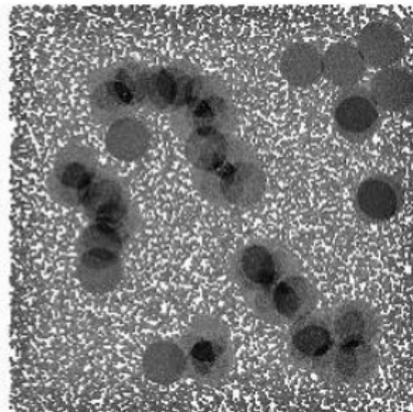
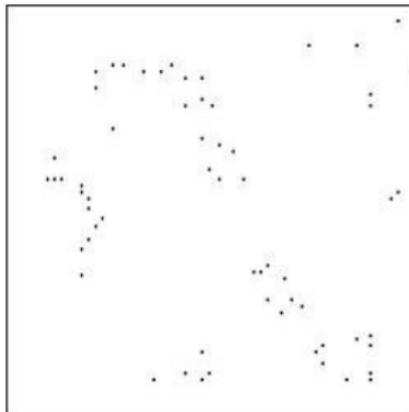
$$\begin{array}{ll} \text{Gesamt-Geburtsrate} & B(x) = \int_{\mathcal{X}} b(x, \xi) d\xi \\ \text{Gesamt-Todesrate} & D(x) = \sum_{n \in I} d(x, x_n) \end{array}$$

Räumliche Geburts- und Todesprozesse

$$\begin{array}{ll} \text{Gesamt-Geburtsrate} & B(x) = \int_{\mathcal{X}} b(x, \xi) d\xi \\ \text{Gesamt-Todesrate} & D(x) = \sum_{n \in I} d(x, x_n) \end{array}$$

- Mit Wkt $\frac{D(x)}{B(x)+D(x)}$ wird der Tod (Löschen) eines Punktes vorgeschlagen
- Mit Wkt $\frac{B(x)}{B(x)+D(x)}$ wird die Geburt (Hinzufügen) eines Punktes vorgeschlagen

Beispiel Räumlicher Geburts- und Todesprozess



Räumliche Geburts- und Todesprozesse

Bemerkung

- Geburts- und Todesprozess konvergiert von *jeder* Startmenge aus
- Nachteil: nur asymptotisch

Im Folgenden betrachten wir einen Algorithmus, der uns eine Stichprobe der *exakten* Verteilung erzeugt.

Adaptive Coupling from the Past

Adaptive Coupling from the Past-Algorithmus: Ermittlung einer Stichprobe aus der *exakten* Dichte der Clustermittelpunkte $p_{X|Y}(\cdot|y)$

Adaptive Coupling from the Past

Adaptive Coupling from the Past-Algorithmus: Ermittlung einer Stichprobe aus der *exakten* Dichte der Clustermittelpunkte $p_{X|Y}(\cdot|y)$

Annahmen:

- 1 \exists Schranken $\bar{b}(\cdot, \cdot)$ und $\underline{d}(\cdot, \cdot)$ eines räumlichen Geburts- und Todesprozesses mit Übergangsraten $b(\cdot, \cdot)$ und $d(\cdot, \cdot)$

$$b(\mathbf{x}, \xi) \leq \bar{b}(\xi)$$

$$d(\mathbf{x} \cup \{\xi\}, \xi) \geq \underline{d}(\mathbf{x} \cup \{\xi\}, \xi) \quad \forall \mathbf{x}, \xi \in \mathcal{X}$$

Adaptive Coupling from the Past

Adaptive Coupling from the Past-Algorithmus: Ermittlung einer Stichprobe aus der *exakten* Dichte der Clustermittelpunkte $p_{X|Y}(\cdot|y)$

Annahmen:

- 1 \exists Schranken $\bar{b}(\cdot, \cdot)$ und $\underline{d}(\cdot, \cdot)$ eines räumlichen Geburts- und Todesprozesses mit Übergangsraten $b(\cdot, \cdot)$ und $d(\cdot, \cdot)$

$$b(\mathbf{x}, \xi) \leq \bar{b}(\xi)$$

$$d(\mathbf{x} \cup \{\xi\}, \xi) \geq \underline{d}(\mathbf{x} \cup \{\xi\}, \xi) \quad \forall \mathbf{x}, \xi \in \mathcal{X}$$

- 2 \exists eindeutige Wahrscheinlichkeitsdichte $\pi(\cdot)$ für die gilt:

$$\pi(\mathbf{x})\bar{b}(\xi) = \pi(\mathbf{x} \cup \xi)\underline{d}(\mathbf{x} \cup \{\xi\}, \xi)$$

Algorithmus

Sei $V_{t,\xi}$, $t \leq 0$, $\xi \in \chi$ Familie von iid Zufallsvariablen mit $U(0,1)$
Initialisiere T mit $T=1$
Sei $D(0)$ eine Stichprobe von $\pi(\cdot)$

Algorithmus

Sei $V_{t,\xi}$, $t \leq 0$, $\xi \in \chi$ Familie von iid Zufallsvariablen mit $U(0,1)$
Initialisiere T mit $T=1$
Sei $D(0)$ eine Stichprobe von $\pi(\cdot)$

Wiederhole:

- 1 erweitere $D(\cdot)$ rückwärts bis $-T$ mit räumlichem Geburts- und Todesprozess mit $\bar{b}(\cdot)$ und $\underline{d}(\cdot|\cdot)$

Algorithmus

Sei $V_{t,\xi}$, $t \leq 0$, $\xi \in \chi$ Familie von iid Zufallsvariablen mit $U(0,1)$
Initialisiere T mit $T=1$
Sei $D(0)$ eine Stichprobe von $\pi(\cdot)$

Wiederhole:

- 1 erweitere $D(\cdot)$ rückwärts bis $-T$ mit räumlichem Geburts- und Todesprozess mit $\bar{b}(\cdot)$ und $\underline{d}(\cdot|\cdot)$
- 2 erzeuge Unterprozess $L_{-T}(\cdot)$ und Oberprozess $U_{-T}(\cdot)$ auf $[-T,0]$ wie folgt:

Algorithmus

- Startwerte:
 - $L_{-T}(-T) = \emptyset$
 - $U_{-T}(-T) = D(-T)$

Algorithmus

- Startwerte:
 - $L_{-T}(-T) = \emptyset$
 - $U_{-T}(-T) = D(-T)$
- an jedem Übergangszeitpunkt $t \in (-T, 0]$ von $D(\cdot)$:
Update des Unter- sowie Oberprozesses

Algorithmus

- Startwerte:
 - $L_{-T}(-T) = \emptyset$
 - $U_{-T}(-T) = D(-T)$
- an jedem Übergangszeitpunkt $t \in (-T, 0]$ von $D(\cdot)$:
Update des Unter- sowie Oberprozesses
- bei Tod („Rückwärts-Geburt“): $D(t) = D(t-) \setminus \{d\}$ wird
Punkt d aus $L_{-T}(t)$ und $U_{-T}(t)$ gelöscht

Algorithmus

- bei Geburt („Rückwärts-Tod“): $D(t) = D(t-) \cup \xi$ wird ξ nur zu $U_{-T}(t-)$ hinzugefügt, falls

$$V_{t,\xi} \leq \max \left\{ \frac{b(x, \xi) \underline{d}(x \cup \xi, \xi)}{\bar{b}(\xi) d(x \cup \xi, \xi)} : L_{-T}(t-) \subseteq x \subseteq U_{-T}(t-) \right\}$$

Algorithmus

- bei Geburt („Rückwärts-Tod“): $D(t) = D(t-) \cup \xi$ wird ξ nur zu $U_{-T}(t-)$ hinzugefügt, falls

$$V_{t,\xi} \leq \max \left\{ \frac{b(x, \xi) \underline{d}(x \cup \xi, \xi)}{\bar{b}(\xi) d(x \cup \xi, \xi)} : L_{-T}(t-) \subseteq x \subseteq U_{-T}(t-) \right\}$$

- analog: ξ wird zu $L_{-T}(t-)$ und $U_{-T}(t-)$ hinzugefügt, wenn

$$V_{t,\xi} \leq \min \left\{ \frac{b(x, \xi) \underline{d}(x \cup \xi, \xi)}{\bar{b}(\xi) d(x \cup \xi, \xi)} : L_{-T}(t-) \subseteq x \subseteq U_{-T}(t-) \right\}$$

Algorithmus

- bei Geburt („Rückwärts-Tod“): $D(t) = D(t-) \cup \xi$ wird ξ nur zu $U_{-T}(t-)$ hinzugefügt, falls

$$V_{t,\xi} \leq \max \left\{ \frac{b(x, \xi) \underline{d}(x \cup \xi, \xi)}{\bar{b}(\xi) d(x \cup \xi, \xi)} : L_{-T}(t-) \subseteq x \subseteq U_{-T}(t-) \right\}$$

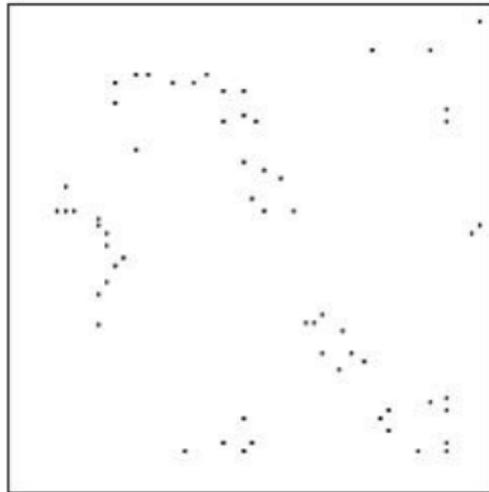
- analog: ξ wird zu $L_{-T}(t-)$ und $U_{-T}(t-)$ hinzugefügt, wenn

$$V_{t,\xi} \leq \min \left\{ \frac{b(x, \xi) \underline{d}(x \cup \xi, \xi)}{\bar{b}(\xi) d(x \cup \xi, \xi)} : L_{-T}(t-) \subseteq x \subseteq U_{-T}(t-) \right\}$$

- ③ wenn $U_{-T}(0) = L_{-T}(0)$ dann gebe den gemeinsamen Wert $U_{-T}(0)$ zurück,
 andernfalls setze $T := 2T$ und wiederhole

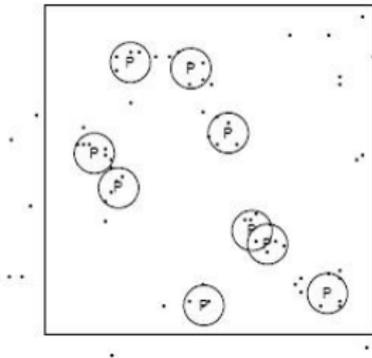
Beispiel: Mammutbaumsetzlinge

- Quadrat 23x23 Meter
- 62 Mammutbaumsetzlinge
- Gesucht: Anzahl, Lage der Elternbäume



Ergebnis des Algorithmus

Anwendung des Adaptive Coupling from the Past-Algorithmus auf die Mammutbaumdaten



Theorem

Theorem

Sei $p_X(\cdot)$ die Dichte eines nichtmonotonen, stückweise stetigen Markov-Punkt-Prozesses auf einer kompakten Menge $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$ und $h(\cdot|\cdot)$ eine glm. beschränkte Abweichungsfunktion eines Cox-Cluster-Prozesses U beobachtet in einem beschränkten Fenster A . Angenommen die Geburtsraten $b(\cdot, \cdot)$ und die Todesraten $d(\cdot, \cdot)$ beschreiben einen eindeutig gegebenen räumlichen Geburts- und Todesprozess der in Verteilung gegen die a-posteriori-Dichte der Clustermittelpunkte $p_{X|Y}(\cdot|y)$ konvergiert und es existieren obere und untere Schranken die ebenfalls einen eindeutig bestimmten räumlichen Geburts- und Todesprozess beschreiben der in Verteilung gegen eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\pi(\cdot)$ konvergiert, für die gilt $\pi(\emptyset) > 0$. Dann bricht der obige Coupling-From-The-Past Algorithmus fast sicher ab und man erhält eine Stichprobe aus der exakten Dichte $p_{X|Y}(\cdot|y)$

Contents

- 1 Einleitung
 - Interpolation
 - Extrapolation
 - Beispiel: Mammutbaumsetzlinge
- 2 Modell
 - Grundlagen
 - Keim-Korn-Modell
 - Clusterprozesse
 - Cox-Clusterprozess
- 3 Bayes'sche Clusteranalyse
 - Räumliche Geburts- und Todesprozesse
 - Adaptive Coupling from the Past - Algorithmus
- 4 Literaturverzeichnis

Literatur

- M.N.M. van Lieshout, A.J. Baddeley „Extrapolating and Interpolating Spatial Patterns“
in A.B. Lawson, D.G.T. Denison (2002), „Spatial Cluster Modelling“, Chapman and Hall, Los Alamos (USA)
- V. Schmidt (2006), „Räumliche Statistik“, Vorlesungsskript an der Universität Ulm (Deutschland)
- J. Illian, A. Penttinen, H. Stoyan, D. Stoyan (2008) „Statistical Analysis and Modelling of spatial Point Patterns“, Wiley, West Sussex (UK)