ulm university universität ulm

Phase Transitions in Infinite Networks

Dominik Brugger, Frank Eisenbarth | 6. Mai 2008

Ziele des Vortrags

Ziele

- **Zufällige Netzwerke** einführen
- grundlegende **Modelle** beschreiben
- wichtige **Eigenschaften** erklären
- Phänomen der **Perkolation**
- elementare **Beweistechniken** anwenden

Überblick

Einführung

- Anwendungsbeispiel
- Motivation

Diskretes Modell - Zufälliges Gitter

- Zufälliges Gitter - Kantenperkolationsmodell
- Perkolation
- Perkolations-Wahrscheinlichkeit
  - Eigenschaften
  - Phasenübergang

Stetige Modelle

- Poisson Prozess
- Nächste-Nachbar-Modell
- Zufälliges Verbindungs-Modell

Zusammenfassung und Ausblick

Quellenangaben

Überblick

Einführung
- Anwendungsbeispiel
- Motivation

Diskretes Modell - Zufälliges Gitter
- Zufälliges Gitter - Kantenperkolationsmodell
- Perkolation
- Perkolations-Wahrscheinlichkeit
  - Eigenschaften
  - Phasenübergang

Stetige Modelle
- Poisson Prozess
- Nächste-Nachbar-Modell
- Zufälliges Verbindungs-Modell

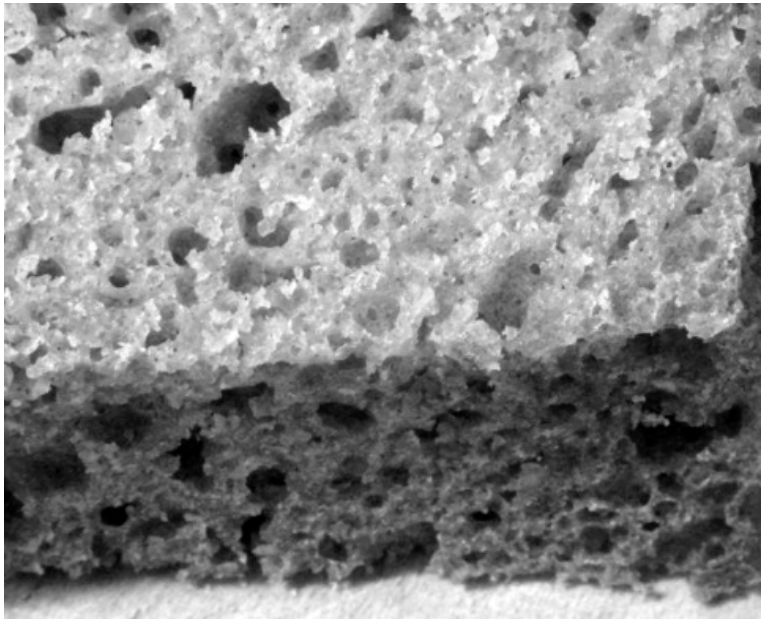
Zusammenfassung und Ausblick

Quellenangaben

Aktivkohlefilter

Funktionsweise

- Aktivkohlefilter bildet **Labyrinth**
- Aktivkohle absorbiert Schadstoffe
- Leistung hängt von der Verweildauer der Luft im Filter ab



Aktivkohlefilter

Interessante Beobachtungen

Ziele

- Möglichst hohe Dichte an Aktivkohle
- Durchlässigkeit (**Perkolation**)

Beobachtung

- Änderung der Dichte bewirkt Übergang zwischen zwei extremen Zuständen
- 1. Luft dringt nicht durch
- 2. Luft dringt durch (**Perkolation**)
- Dieser Übergang geschieht *abrupt*
- $\rightsquigarrow$ **Phasenübergang**

Weitere Anwendungen

Weitere Anwendungsgebiete

- Materialwissenschaften
- Kommunikationsnetzwerke
- Elektrotechnik

Überblick

Einführung
- Anwendungsbeispiel
- Motivation

Diskretes Modell - Zufälliges Gitter
- Zufälliges Gitter - Kantenperkolationsmodell
- Perkolation
- Perkolations-Wahrscheinlichkeit
  - Eigenschaften
  - Phasenübergang

Stetige Modelle
- Poisson Prozess
- Nächste-Nachbar-Modell
- Zufälliges Verbindungs-Modell

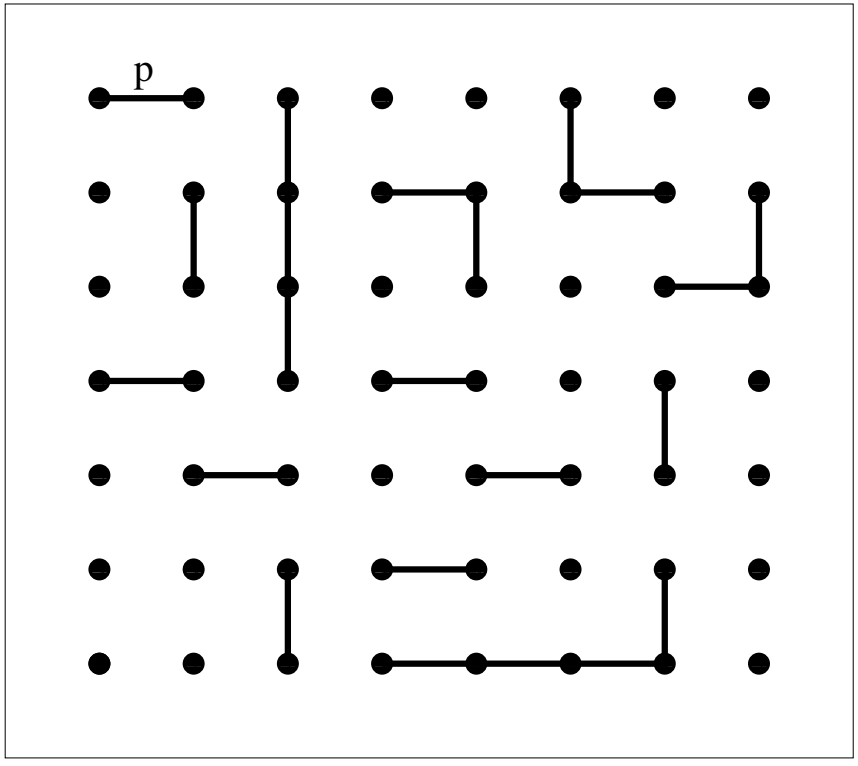
Zusammenfassung und Ausblick

Quellenangaben

Zufälliges Gitter - Kantenperkolationsmodell

Modell

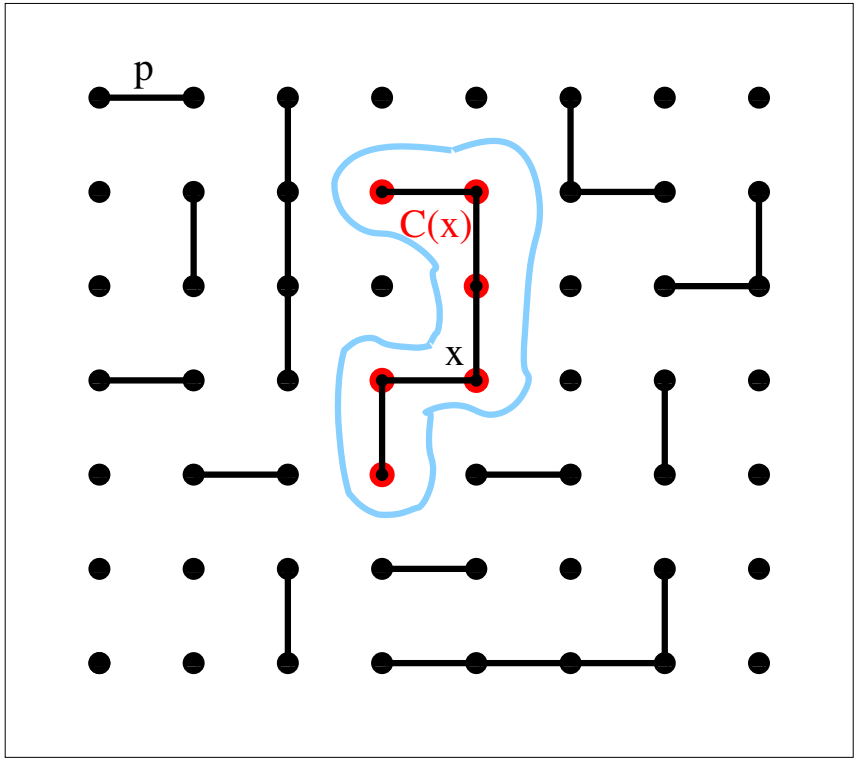
- Punkte = $\mathbb{Z}^2$
- Bernoulli-Experiment $\rightsquigarrow$ Verbindung



Komponenten

Definition Komponente

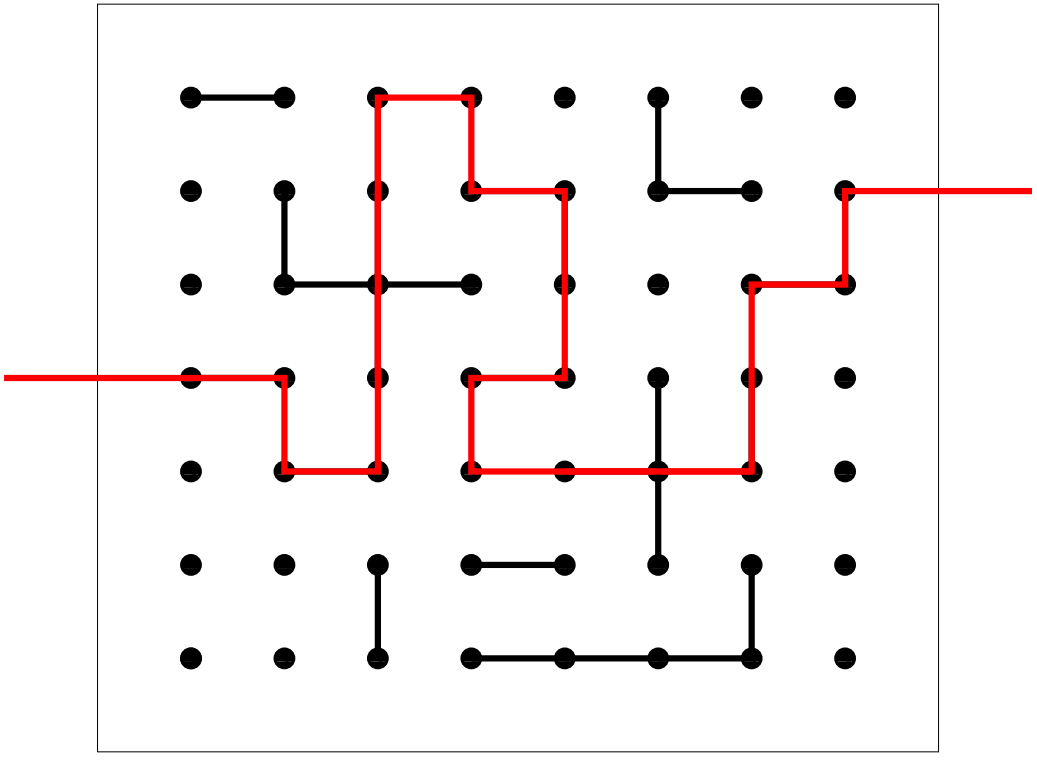
- $C(x)$ = Menge von Punkten, die mit x verbunden sind



Perkolation

Ziel

- Unbeschränkte Komponente
- $|\mathbf{C}(\mathbf{x})| = \infty$ für ein $\mathbf{x}$



Perkolations-Wahrscheinlichkeit

Definition

$$\begin{aligned}\theta(p) &= \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_p(|C(0)| = n)\end{aligned}$$

für $p \in [0, 1]$

Perkolations-Wahrscheinlichkeit - Grundlegende Eigenschaften

Trivial

$$\theta(0) = \mathbb{P}_0\left(|C(0)| = \infty\right) = 0$$

und

$$\theta(1) = \mathbb{P}_1\left(|C(0)| = \infty\right) = 1$$

Perkolations-Wahrscheinlichkeit - Monotonie

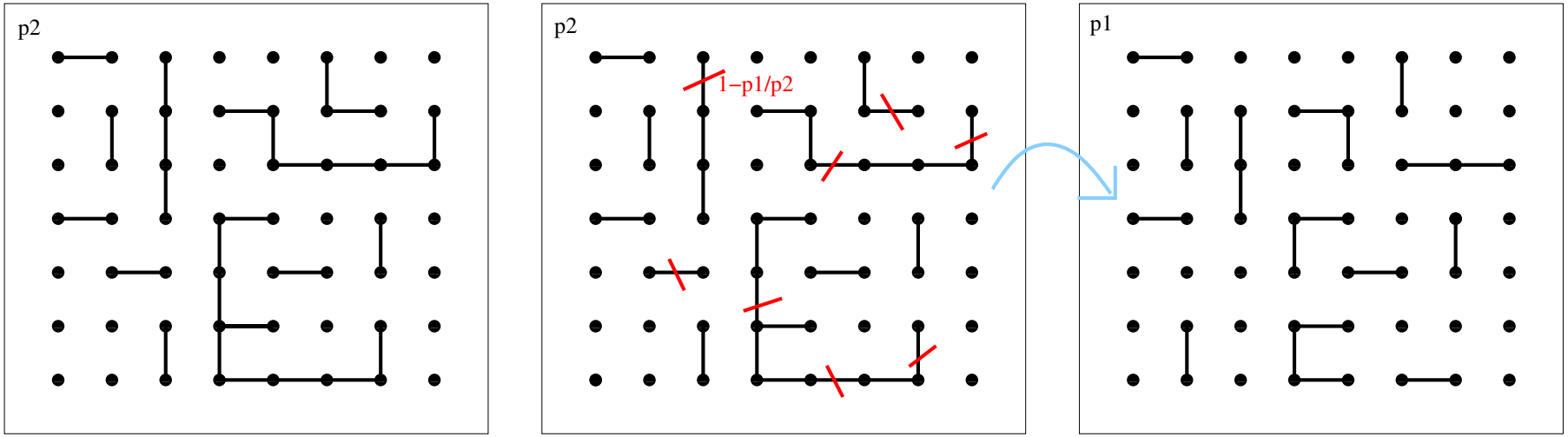
Theorem 1 *(Monotonie)*

$$\theta(p_1) \leq \theta(p_2) \quad \forall\, p_1 < p_2$$

Beweistechnik: Coupling

Coupling Technik

- Start: Realisierung des Gitter-Modells mit Parameter p_2
- Thinning: streiche Kante mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{p_1}{p_2}$
- $\rightsquigarrow$ Realisierung des Gitter-Modells mit Parameter p_1

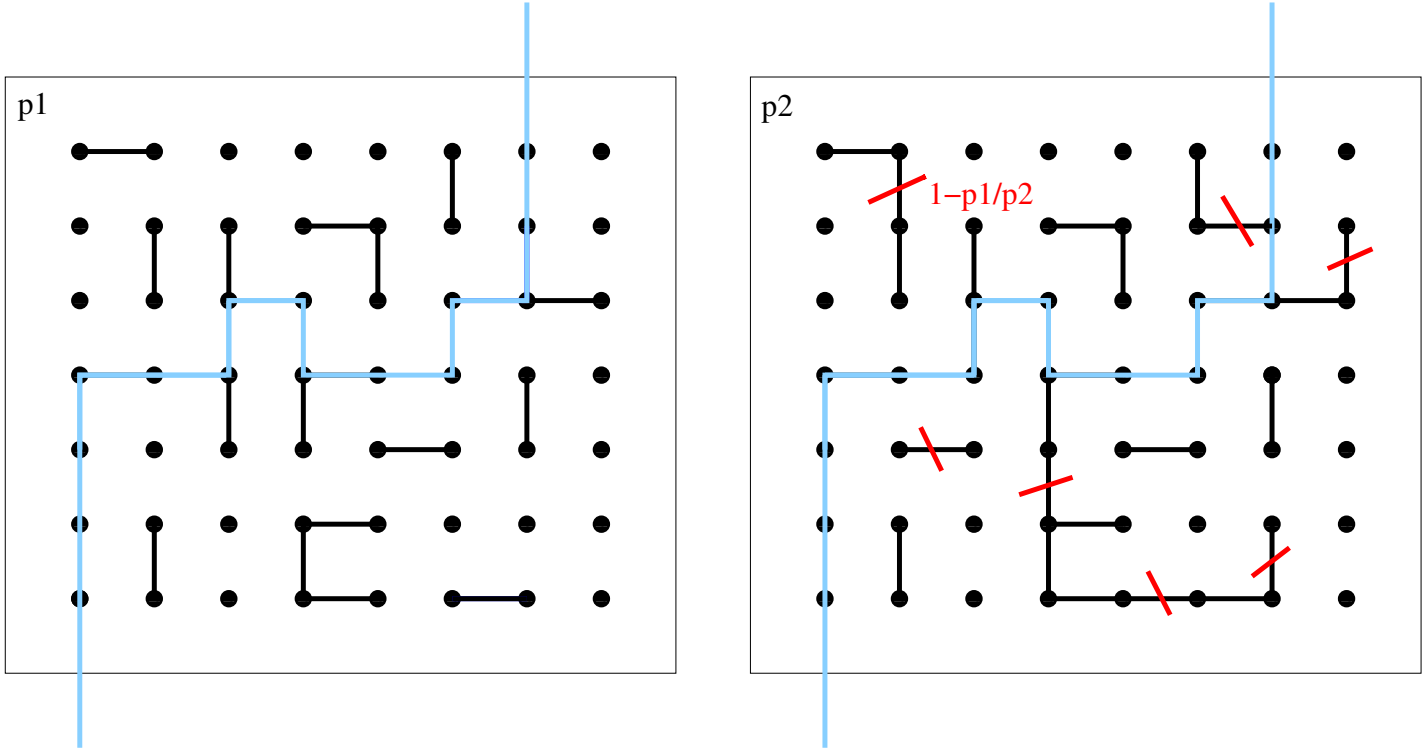


Perkolations-Wahrscheinlichkeit - Monotonie

Anwendung der *Coupling*-Technik

- Realisierung des Gitter-Modells mit Parameter p_1 *perkoliert*
- $\Rightarrow$ Realisierung des Gitter-Modells mit Parameter p_2 perkoliert

q.e.d.



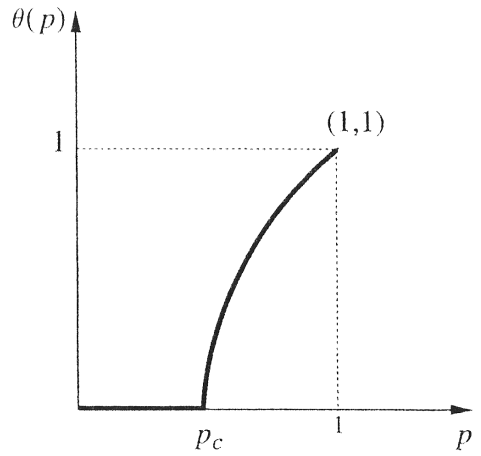
Phasenübergang - Kritischer Wert für p

Theorem 2

$\exists\, p_c \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

$$\theta(p) = 0, \quad p < p_c$$

$$\theta(p) > 0, \quad p > p_c$$



Korollar

$\theta(p) > 0 \Leftrightarrow$ unbeschränkte Komponente existiert *fast sicher*

Beweis Teil I

Ziel

Zeige:

$$\theta(p) = 0 \quad \text{für} \quad p < 1/3$$

Counting-Argument

- betrachte *vollständig verbundenes* Gitter
- betrachte *alle* Pfade vom Ursprung der Länge n
- gib jedem eine Nummer

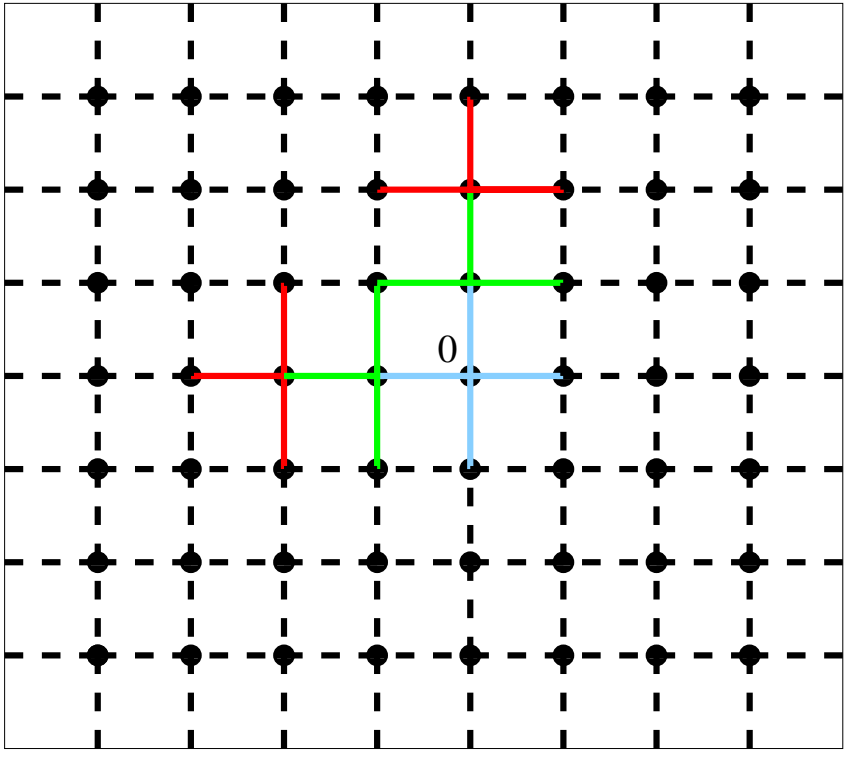
Definition

$$\sigma(n) = \text{Anzahl solcher Pfade}$$

Beweis Teil I

Obere Schranke

$$\sigma(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}$$



Beweis Teil I

Definition

- $N(n) =$ Anzahl Pfade der Länge n vom Ursprung im betrachteten **zufälligen Gitter**
- ZV $\mathbb{I}_j = \begin{cases} 1 & \text{Pfad } j \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \theta(p) &\leq \mathbb{P}_p\left(N(n) \geq 1\right) \\ &= \mathbb{P}_p\left(\bigcup_{j=1}^{\sigma(n)} \{\mathbb{I}_j = 1\}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\sigma(n)} \mathbb{P}_p\left(\mathbb{I}_j = 1\right) = \sigma(n) \cdot p^n \end{aligned}$$

Beweis Teil I

Erinnerung

$$\sigma(n) \leq 4 \cdot 3^{n-1}$$

Grenzwertbetrachtung

$$\theta(p) \leq 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n = 4p \cdot (3p)^{n-1} \overset{!}{\longrightarrow} 0 \quad (n \to \infty)$$

gilt für $p < 1/3$

Beweis Teil II

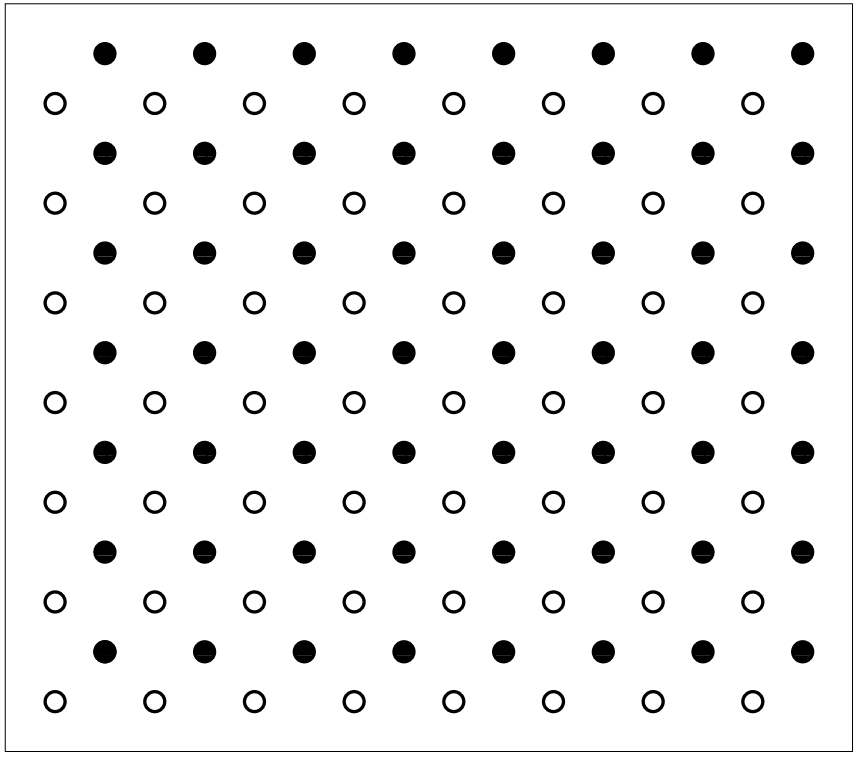
Ziel

$$\theta(p) > 0 \quad \text{für } p > 2/3$$

Beweis Teil II - Duales Gitter

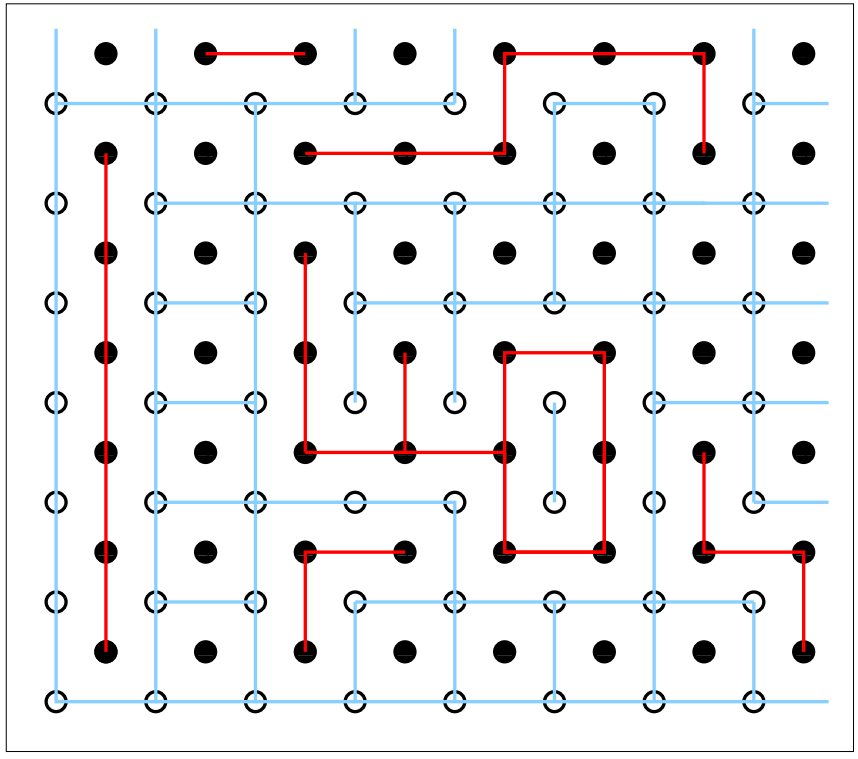
Punkte im dualen Gitter

$$\left(\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\right)\times\left(\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\right)$$

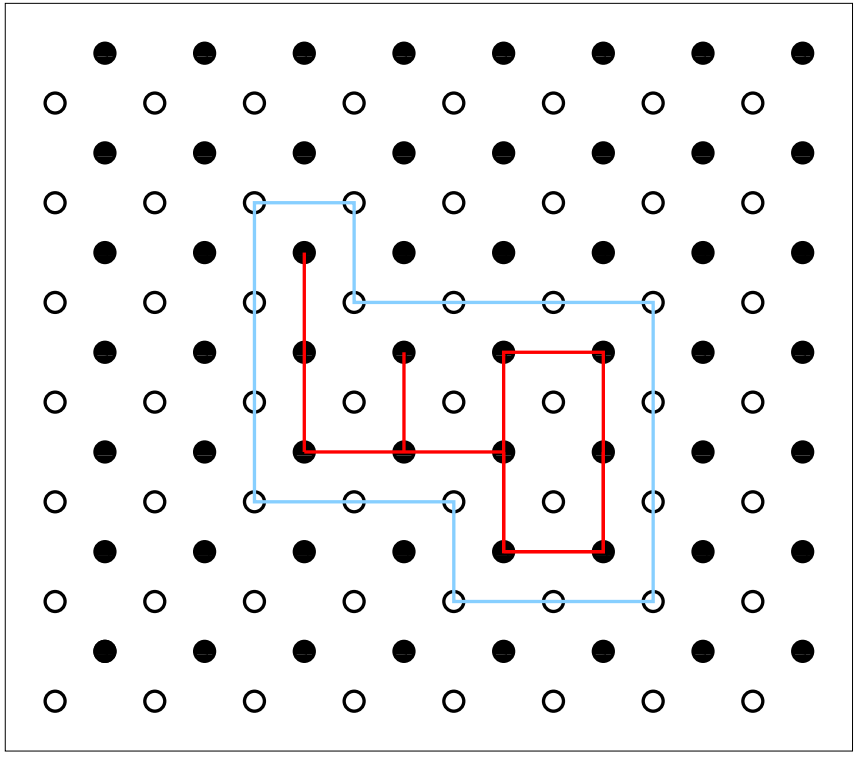


Beweis Teil II - Zufälliges duales Gitter G^d

- G zufälliges Gitter
- G^d dazu *duales zufälliges Gitter*
- betrachte je zwei Punkte aus G^d
- diese sind verbunden, falls sie keine Kante in G kreuzen



Beweis Teil II - Umgebende Zyklen



Dualität

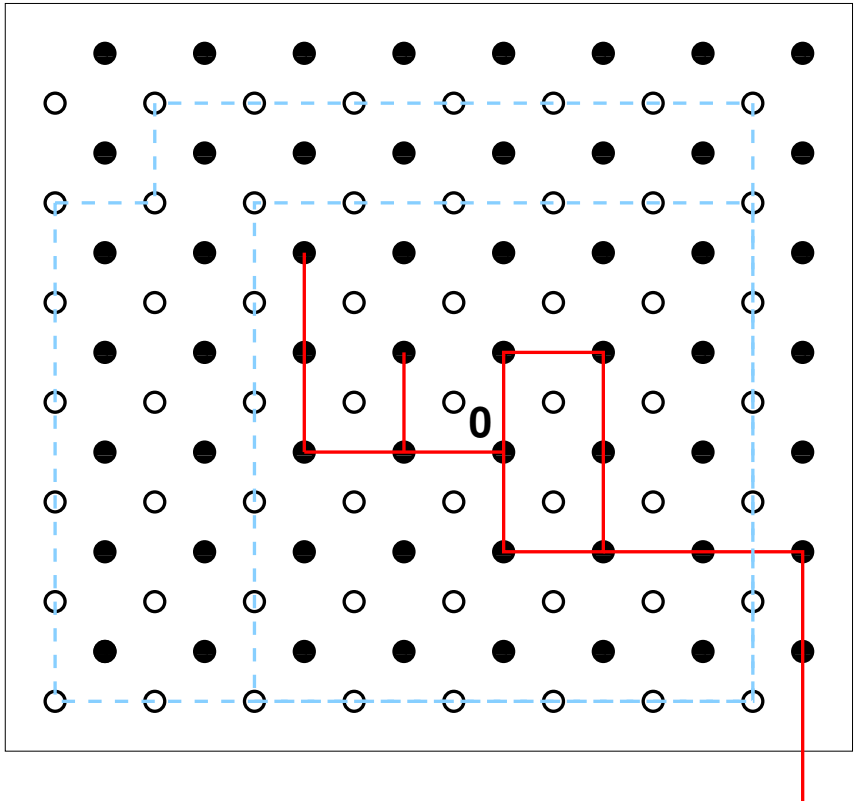
Jede **beschränkte** Komponente wird von einem Zyklus im dualen Gitter umgeben

Beweis Teil II - Umgebende Zyklen

Dualität

$|C(0)| < \infty \Leftrightarrow$ Ursprung ist von dualem Zyklus umgeben

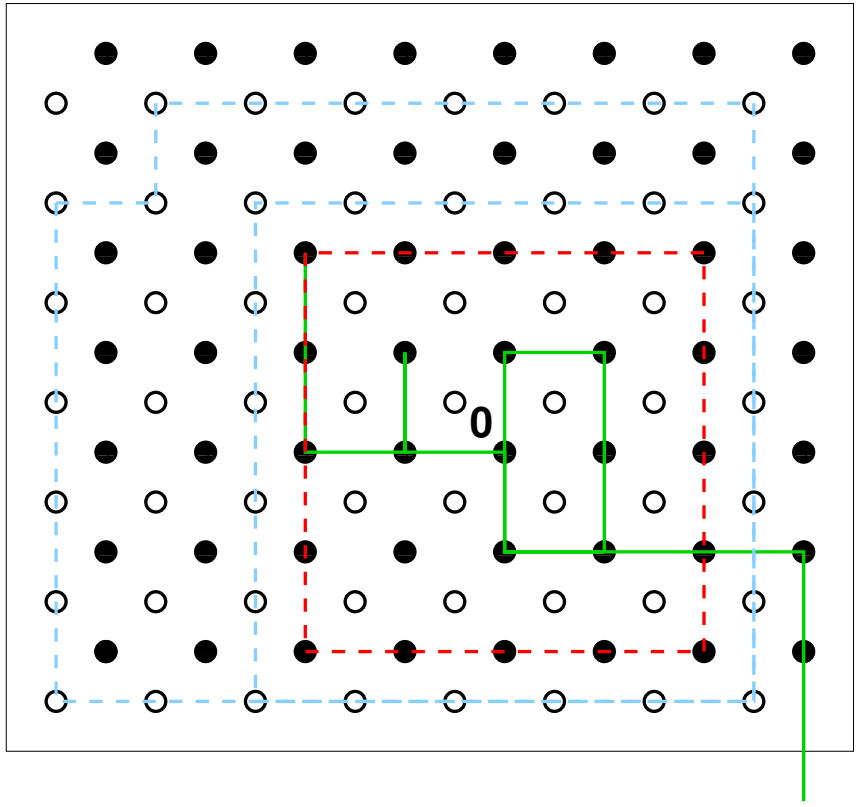
$|C(0)| = \infty \Leftrightarrow \nexists$ dualer Zyklus, der den Ursprung umgibt



Beweis Teil II

Definitionen

- B_k Box der Länge k um 0
- δB_k = Punkte auf dem Rand von B_k
- C_k = Menge aller Zyklen die B_k umgeben

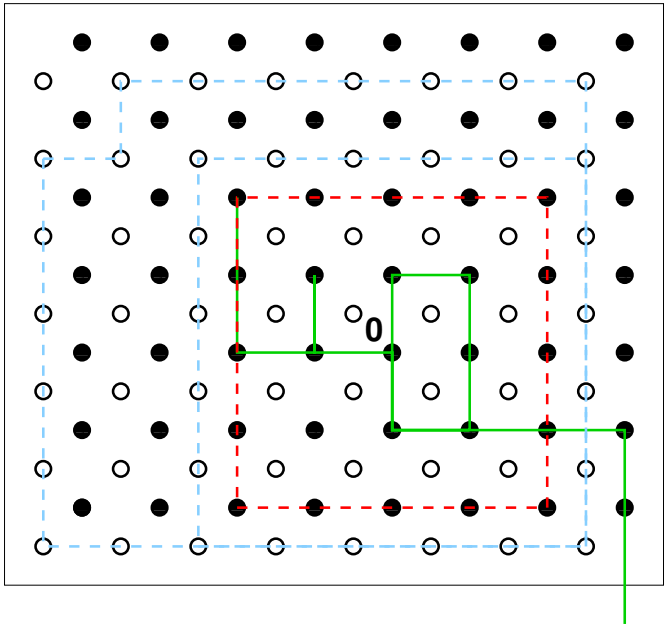


Beweis Teil II

Skizze

$$\mathbb{P}_p\left(\bigcup_{x\in\delta B_k}\{|C(x)|=\infty\}\right)=\mathbb{P}_p\left(\bigcap_{\gamma\in C_k}\gamma\not\subseteq G^d\right)>0$$

für $p>2/3$ und k groß genug



Beweis Teil II

Resultate

- Teil I: $p < 1/3 : \theta(p) = 0$
- Teil II: $p > 2/3 : \theta(p) > 0$

Fazit

Aufgrund der Monotonie von θ in p gilt

$\exists\, p_c \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

$$\theta(p) = 0, \quad p < p_c$$

$$\theta(p) > 0, \quad p > p_c$$

q.e.d.

Überblick

Einführung
- Anwendungsbeispiel
- Motivation

Diskretes Modell - Zufälliges Gitter
- Zufälliges Gitter - Kantenperkolationsmodell
- Perkolation
- Perkolations-Wahrscheinlichkeit
  - Eigenschaften
  - Phasenübergang

Stetige Modelle
- Poisson Prozess
- Nächste-Nachbar-Modell
- Zufälliges Verbindungs-Modell

Zusammenfassung und Ausblick

Quellenangaben

Punktprozess

Definition

- X = zufällige Punktmenge auf $\mathbb{R}^2$

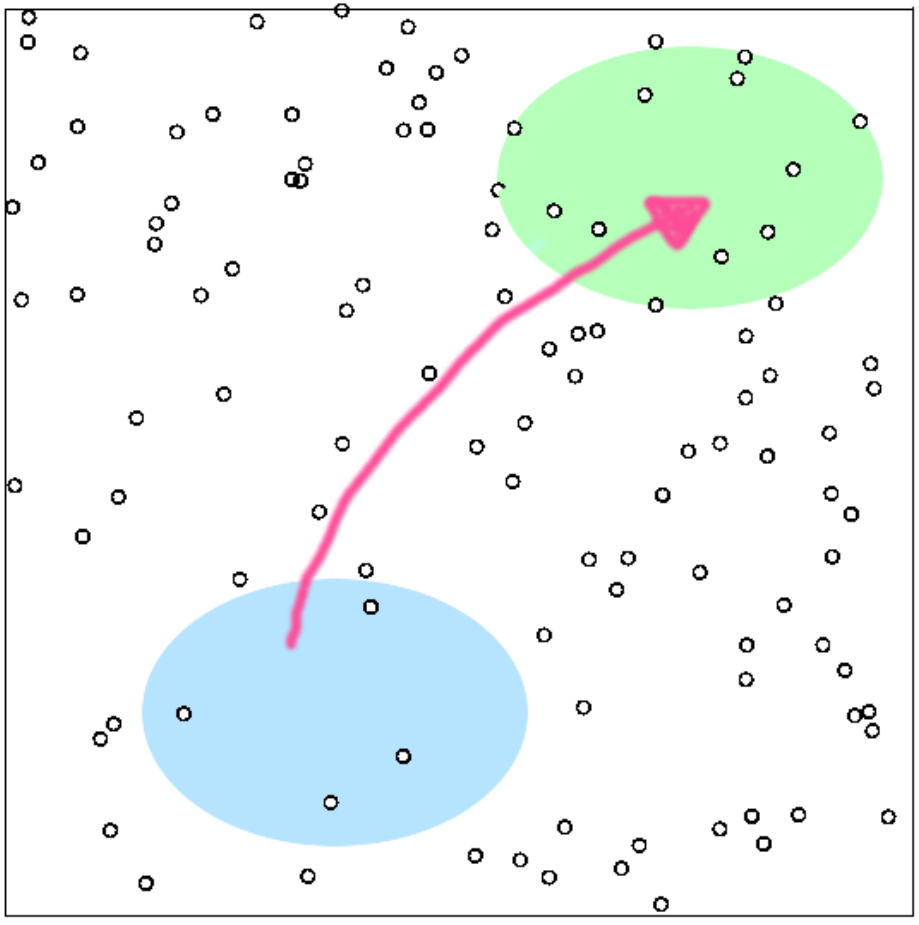
Wünschenswerte Eigenschaften

- *Stationarität*
- *Unabhängigkeit*
- *keine Häufungspunkte*

Punktprozess - Stationarität

Definition Stationarität

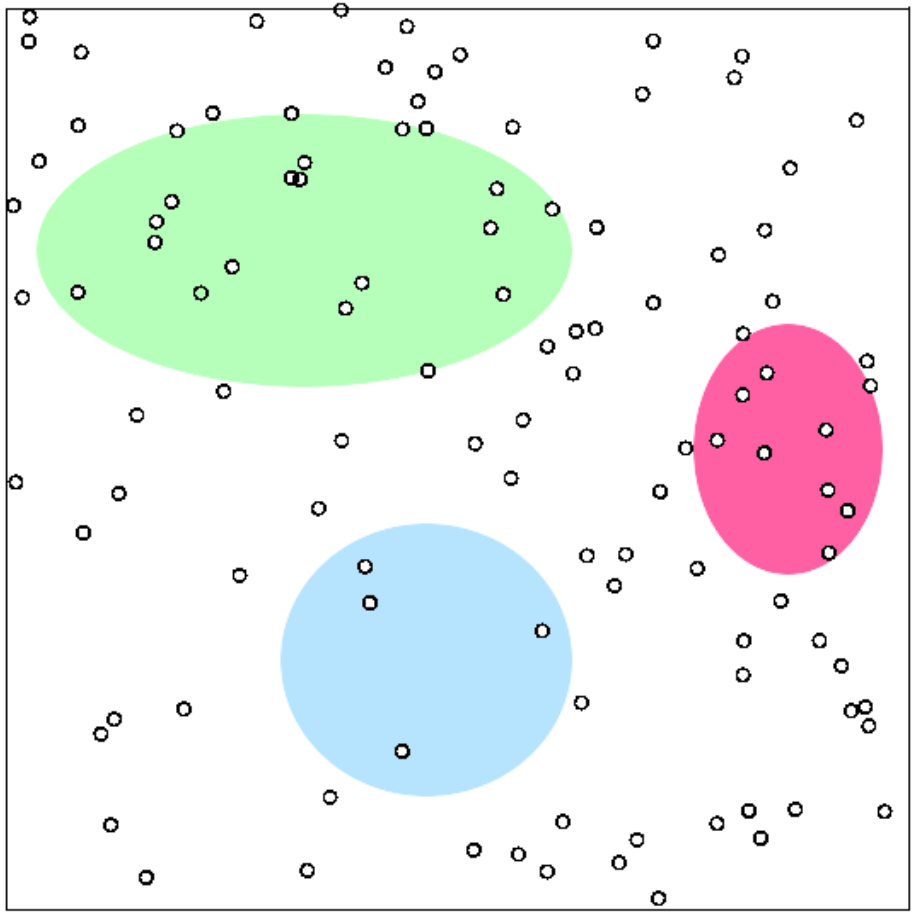
Die Verteilung der Punkte ist translationsinvariant



Punktprozess - Unabhängigkeit

Definition Unabhängigkeit

Die Anzahl der Punkte in disjunkten Gebieten ist unabhängig



Homogener Poisson Prozess

Notation

$D \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$ beschränktes Gebiet

- $|D|$ = Lebesgue-Maß
- $N : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{N}_0$
- N_D = Anzahl der Punkte von X in D

Definition: *Homogener* Poisson Prozess

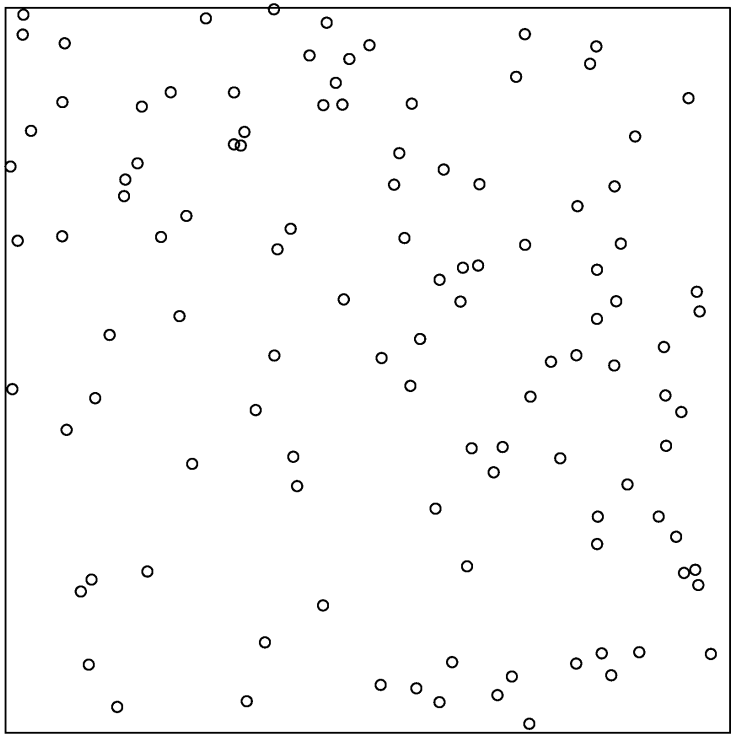
$$N_{D_1}, N_{D_2}, \ldots \text{ unabhängig } \forall D_i \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2), D_j \cap D_k = \emptyset, \ j \neq k$$

$$\mathbb{P}(N_D = k) = e^{-\lambda \cdot |D|} \frac{(\lambda \cdot |D|)^k}{k!} \quad \forall D \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$$

Homogener Poisson Prozess

Konstruktion im Einheitsquadrat

- n Anzahl der Punkte Poisson-verteilt mit Parameter λ
- Generiere n Punkte gleichverteilt, d.h. $x_i, y_i \sim U[0, 1]$



Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda = 100$

Punkte - und nun?

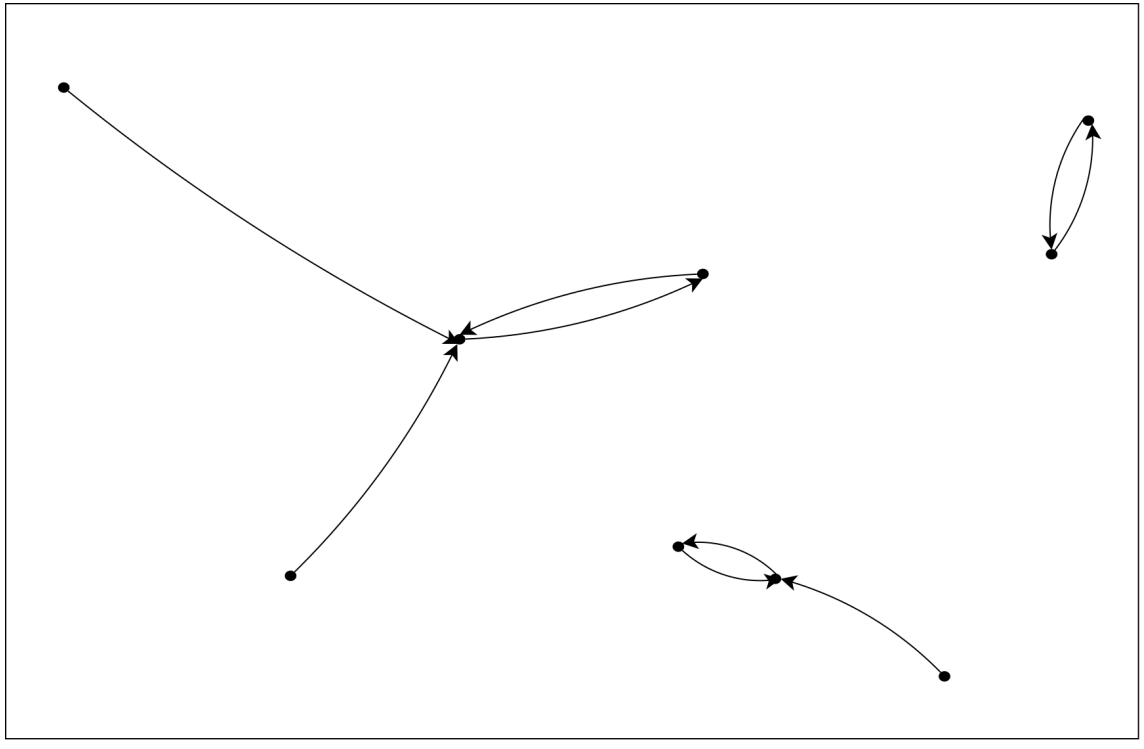
Frage

Wie sind diese zu verbinden?

k-Nächste-Nachbar-Modell

Modell

- Poisson Punkt Prozess X mit Intensität $\lambda > 0$
- verbinde jeden Punkt mit seinen k nächsten Nachbarn



1-Nächste-Nachbar-Modell

Phasenübergang - Kritischer Wert für k

Definition

- Ereignis $U_0 =$ unbeschränkte Komponente existiert in 0

Theorem 3

$\exists\, k_c \geq 2$

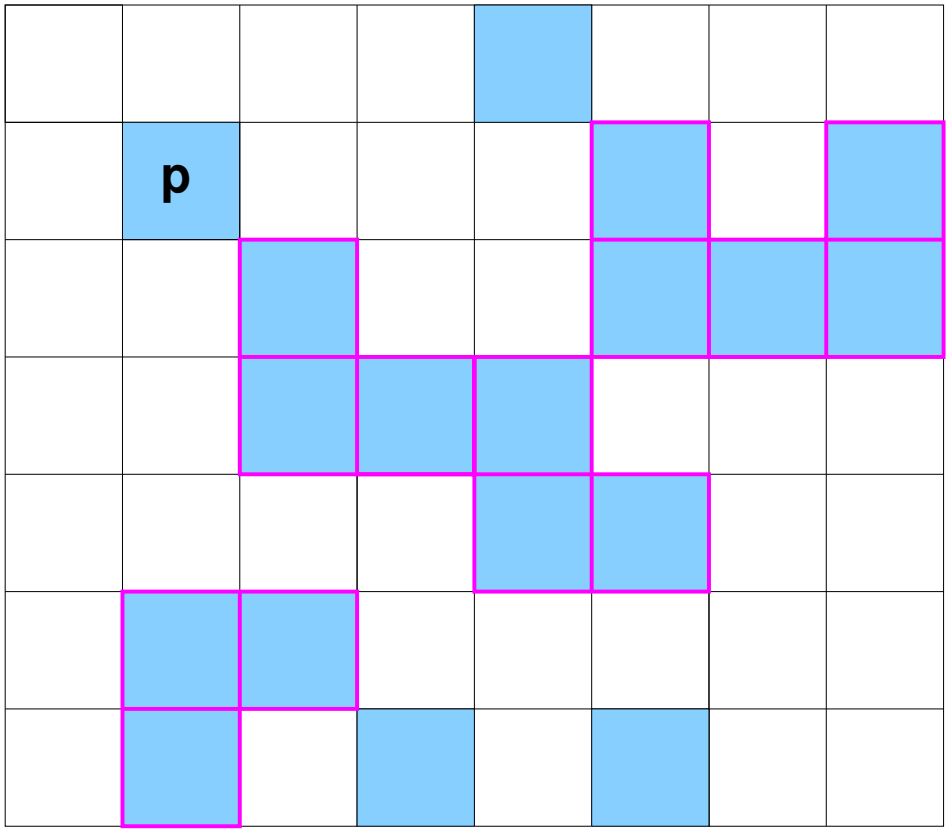
$$\mathbb{P}_k(U_0) = 0, \quad k < k_c$$

$$\mathbb{P}_k(U_0) > 0, \quad k \geq k_c$$

Beweis - Einführung Knotenperkolation

Modell

- Teile Ebene in Quadrate auf
- Quadrate werden mit Wahrscheinlichkeit p besetzt
- benachbarte Quadrate die eine Seite teilen sind verbunden



Beweis - Einführung Knotenperkolation

Phasenübergang - Kritischer Wert für p

$\exists\, p_c \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

$$\theta(p) = 0, \quad p < p_c$$

$$\theta(p) > 0, \quad p > p_c$$

Näherungswert für p_c

$$p_c \approx 0.59$$

Beweis - Renormalisierung

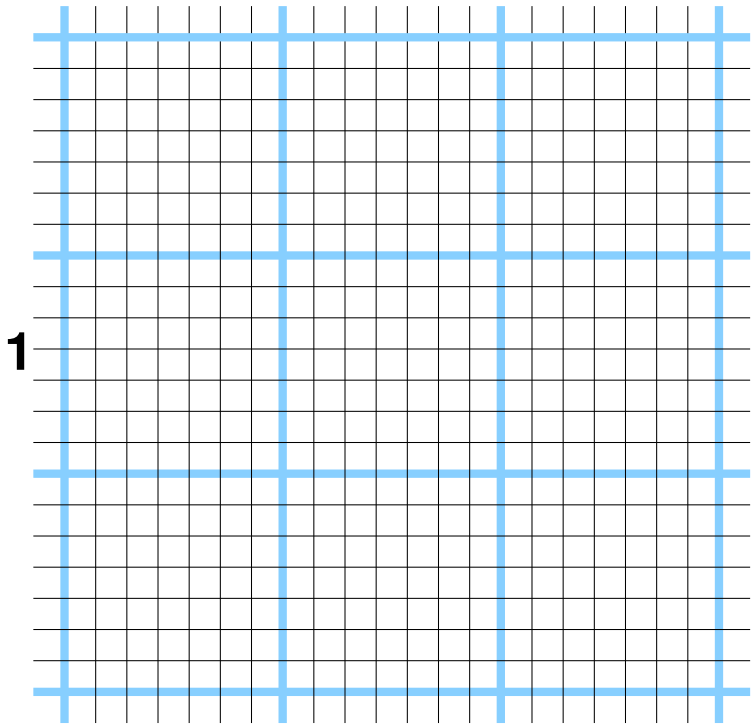
Renormalisierung

Idee: Knotenperkolation $\Rightarrow$ Perkolation im Nächste-Nachbar-Modell

Beweis - Aufteilung der Ebene

Vorgehensweise

- teile Ebene in Einheitsquadrate auf
- unterteile Einheitsquadrate
- $\rightsquigarrow 7^2$ Unterquadrate



Beweis - *Gute* Einheitsquadrate

Definition Ereignisse

- Ereignis A = jedes Unterquadrat enthält mindestens einen Punkt
- Ereignis B = jedes Unterquadrat enthält maximal $\frac{m}{7^2}$ Punkte

Definition Gutes Einheitsquadrat

Einheitsquadrat in dem A und B auftreten heißt *gut*

Perkolation

Wenn

$$P(gut) = P(A \cap B) > p_c$$

perkolieren die guten Quadrate im Gitter

Beweis - Wahl der Parameter für Wahrscheinlichkeit *guter* Einheitsquadrate

Parameter

- Wähle Intensität λ so hoch, dass

$$P(A) > \frac{1 + p_c}{2}$$

- Wähle m so, dass

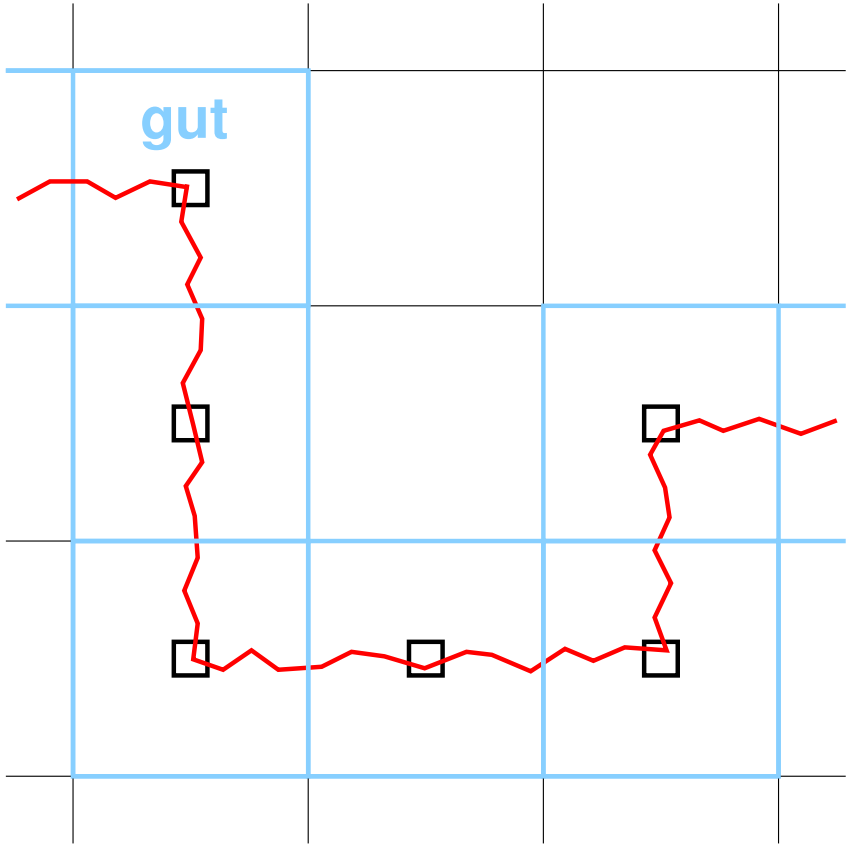
$$P(B) > \frac{1 + p_c}{2}$$

Abschätzung

$$\Rightarrow P(A \cap B) > p_c$$

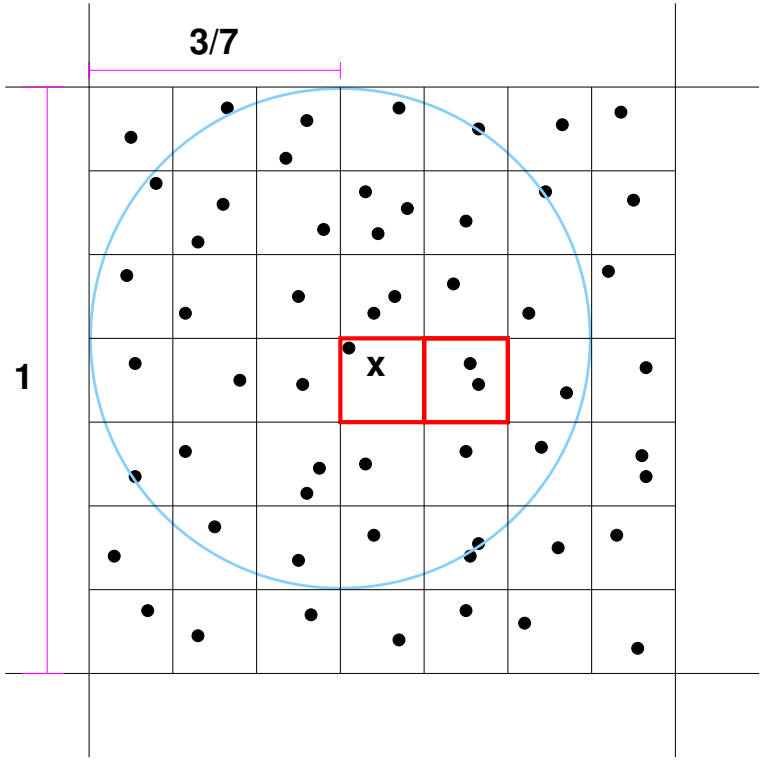
Beweis - *Gute* Einheitsquadrate

- Stand: gute Quadrate perkolieren im Gitter
- Zu zeigen: Punkte perkolieren im Nächste-Nachbar-Modell
- Idee: Zentren angrenzender guter Quadrate sind verbunden



Beweis - Punkte angrenzender Unterquadrate in guten Einheitsquadraten sind verbunden

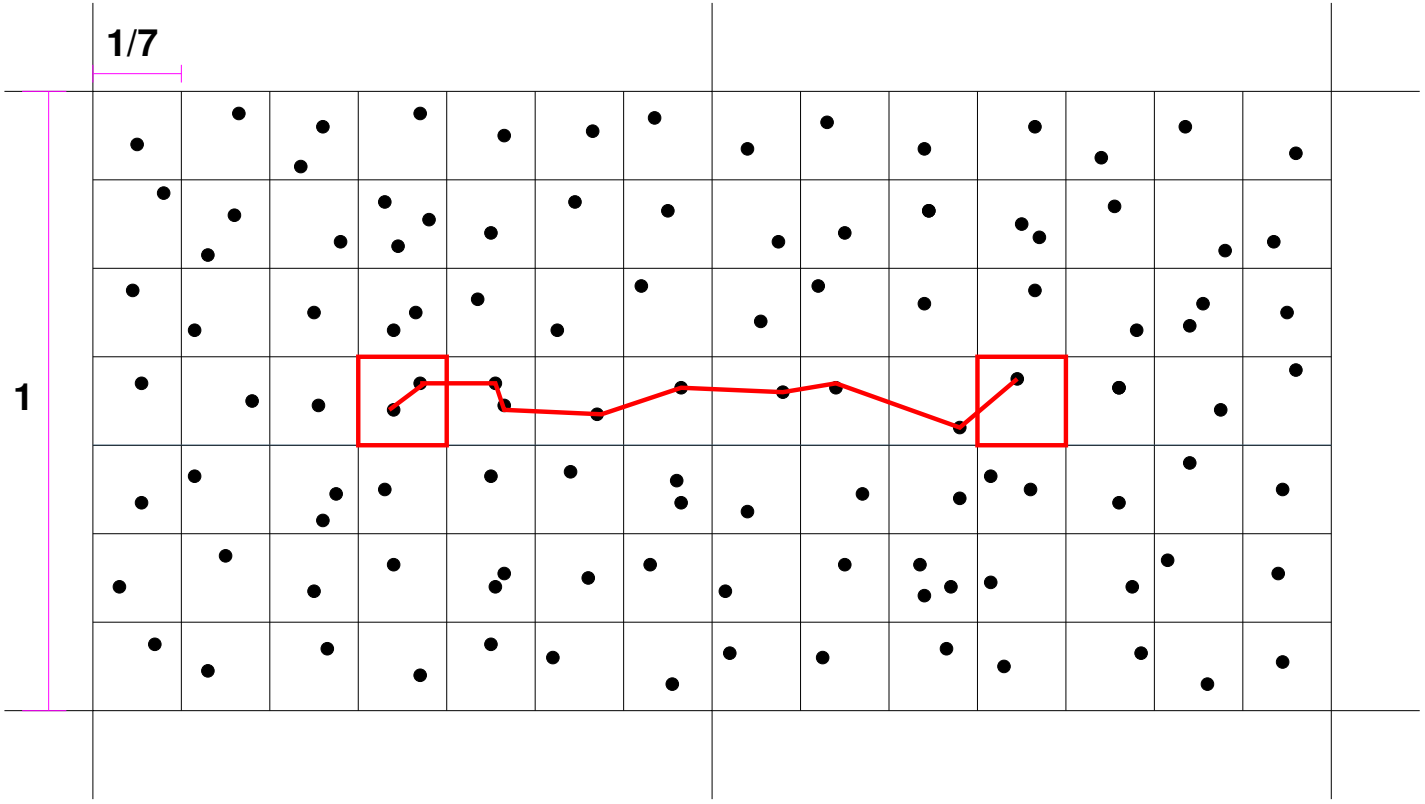
- max m Punkte im Kreis $\subset$ Einheitsquadrat
- x ist im m-Nächste-Nachbar-Modell mit allen Punkten im Kreis verbunden
- insbesondere mit denen der angrenzenden Unterquadrate



Beweis - Punkte der Zentren in guten Einheitsquadraten sind verbunden

- mehrmalige Anwendung dieses Konzepts
- $\Rightarrow$ Punkte der Zentren sind verbunden

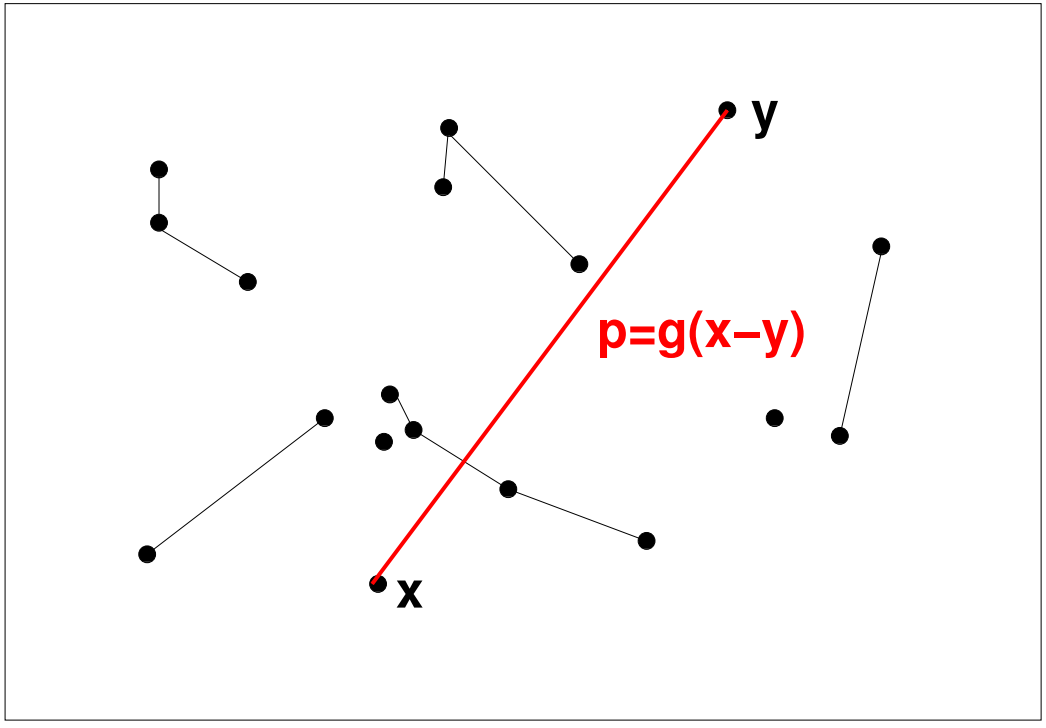
q.e.d.



Zufälliges Verbindungs-Modell

Modell

- Poisson Punkt Prozess X mit Intensität $\lambda > 0$
- verbinde x und y mit Wahrscheinlichkeit $g(x - y)$

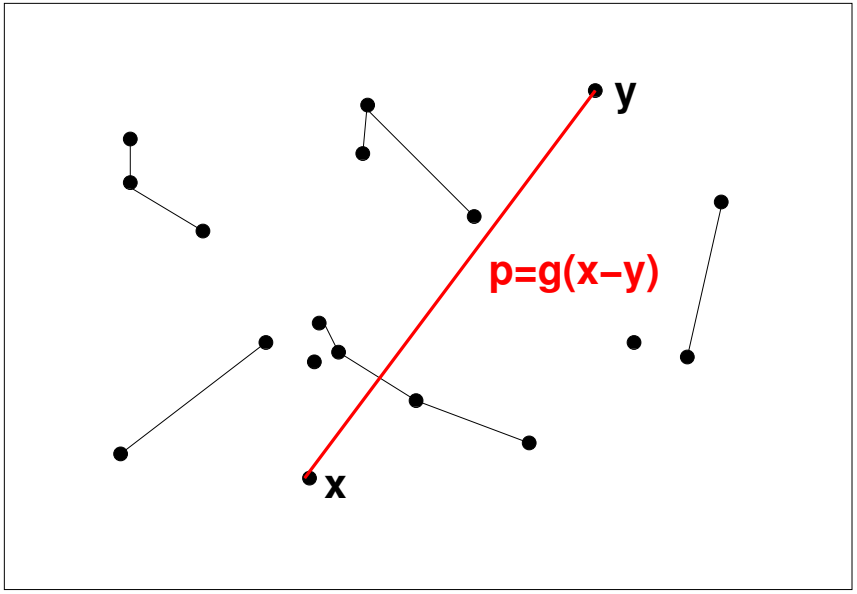


Zufälliges Verbindungs-Modell

Zufällige Verbindungs-Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$$

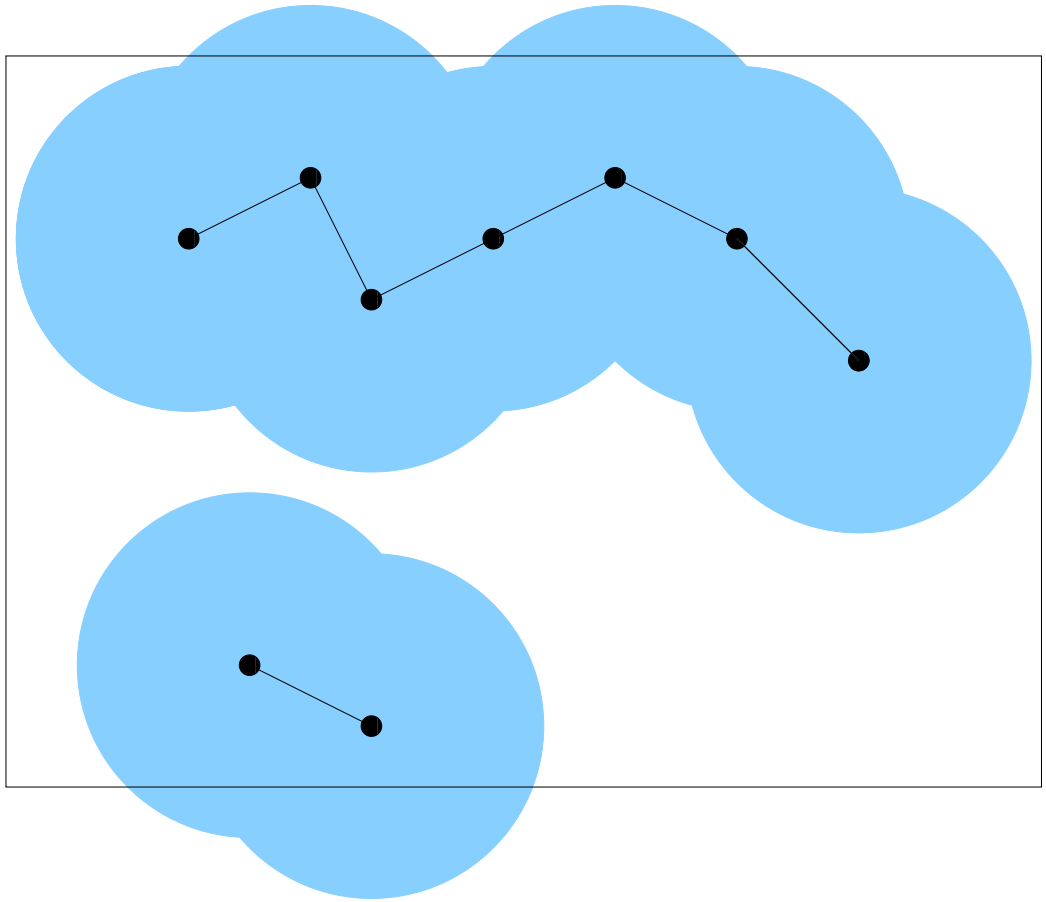
- hängt nur von $|\cdot|$ ab,
- nicht aber von der geometrischen Lage
- nicht-wachsend in $|\cdot|$
- verbinde x und y mit Wahrscheinlichkeit $g(x - y) = \tilde{g}(|x - y|)$



Beispiel: Boolesches Modell

Verbindungsfunktion

$$g(x-y) = \begin{cases} 1, & |x-y| \leq r \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



Phasenübergang - Kritischer Wert für λ

Definition *(Perkolations-Wahrscheinlichkeit)*

$$\theta(\lambda) = \mathbb{P}_\lambda(|C(0)| = \infty)$$

Theorem 4

$\exists\, 0 < \lambda_c < \infty$

$$\theta(\lambda) = 0, \quad \lambda < \lambda_c$$

$$\theta(\lambda) > 0, \quad \lambda > \lambda_c$$

Überblick

Einführung
- Anwendungsbeispiel
- Motivation

Diskretes Modell - Zufälliges Gitter
- Zufälliges Gitter - Kantenperkolationsmodell
- Perkolation
- Perkolations-Wahrscheinlichkeit
  - Eigenschaften
  - Phasenübergang

Stetige Modelle
- Poisson Prozess
- Nächste-Nachbar-Modell
- Zufälliges Verbindungs-Modell

Zusammenfassung und Ausblick

Quellenangaben

Zusammenfassung

Fazit

- Perkolation zentrale Eigenschaft von zufälligen Netzwerken
- Phasenübergang geschieht abrupt
- Es gibt kritische Werte für Modellparameter
- Analogie in allen betrachteten Modellen
- Zusammenhang diskreter und stetiger Modelle

Ausblick

Ausblick

- Anwendung für *endliche* zufällige Netzwerke
- Resultate sind Indikatoren für das Verhalten von endlichen zufälligen Netzwerken

Überblick

Einführung
- Anwendungsbeispiel
- Motivation

Diskretes Modell - Zufälliges Gitter
- Zufälliges Gitter - Kantenperkolationsmodell
- Perkolation
- Perkolations-Wahrscheinlichkeit
  - Eigenschaften
  - Phasenübergang

Stetige Modelle
- Poisson Prozess
- Nächste-Nachbar-Modell
- Zufälliges Verbindungs-Modell

Zusammenfassung und Ausblick

Quellenangaben

Verwendete Quellen

Literatur

- M. Franceschetti, R. Meester: *Random Networks for Communication*. Cambridge University Press, 2007

Bildnachweis

- Aktivkohlefilter, *Wikipedia* *http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Aktivkohlerp.jpg*, abgerufen am 26.4.2008