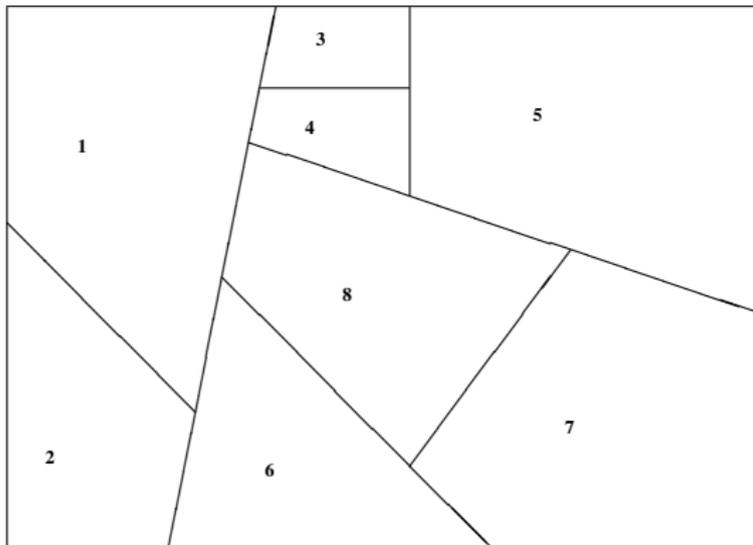


$$P(Y(a, W) \cap C \neq \emptyset) = T_{Y(a, W)}(C) \\ = e^{-a \cdot \Lambda(C)} \quad \forall C \subset \mathbb{R}^2 \text{ kompakt}$$

Crack-STIT-Mosaik

Ziele des Vortrags:

- ▶ Konstruktion eines zufälligen Mosaikes mit einer bestimmten Eigenschaft: STIT
- ▶ Erläuterung der STIT-Eigenschaft und weiterer Eigenschaften
- ▶ Vergleich mit der Praxis und Ausblick



Konstruktion

Eigenschaften

- STIT
- Weitere Eigenschaften

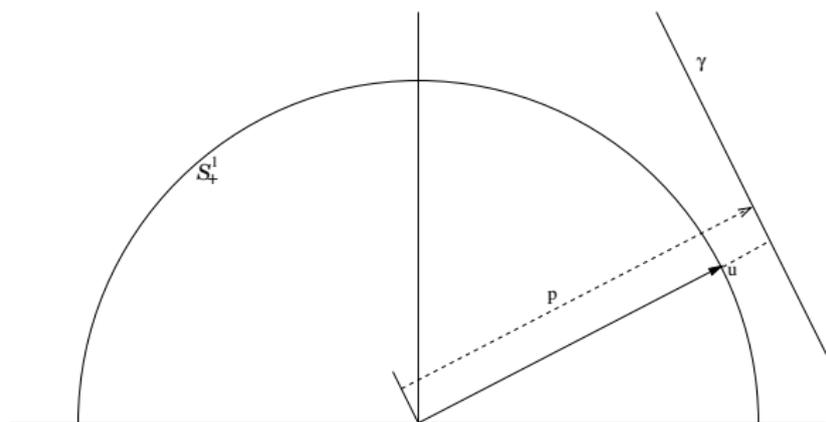
Praxis

Ausblick

Quellen

Bildnachweis

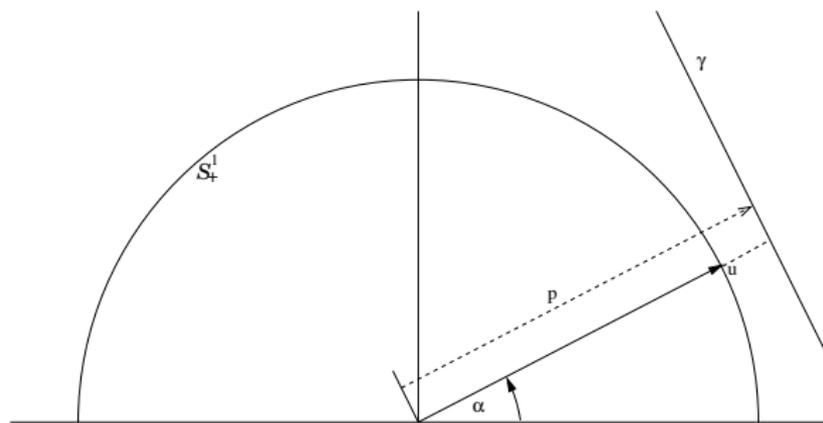
Die Geraden



Raum der Geraden in \mathbb{R}^2

- ▶ Sei S_+^1 der obere Einheitshalbkreis und $u \in S_+^1$ ein Einheitsvektor.
- ▶ Sei $p \in \mathbb{R}$ ein gerichteter Abstand.
- ▶ Dann ist eine Gerade γ durch (u, p) , ihren Normalenvektor und den Abstand vom Ursprung, eindeutig parametrisiert.

Die Geraden



Raum der Geraden in \mathbb{R}^2

- ▶ Weise $\phi : [0, \pi) \rightarrow S_+^1$, $\phi(\alpha) := \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$ jedem $\alpha \in [0, \pi)$ einen eindeutigen Einheitsvektor $u \in S_+^1$ zu.
- ▶ Dann ist $G := \mathbb{R} \times [0, \pi)$ ein Parameterraum für den Raum der Geraden in \mathbb{R}^2 .
- ▶ Gemeinsam mit der Borelschen σ -Algebra \mathcal{B} ist (G, \mathcal{B}) ein messbarer Raum.

Die Geraden

ein Maß auf (G, \mathcal{B})

- ▶ Sei \mathcal{R} die Gleichverteilung auf $[0, \pi)$ mit Dichte f und λ das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} .
- ▶ Dann ist durch $\Lambda(d(\rho, \alpha)) := \lambda(d\rho)f(\alpha)\mathbb{I}_{[0, \pi)}(\alpha)$ ein isotropes Maß auf (G, \mathcal{B}) gegeben.

Die Geraden

ein Maß auf (G, \mathcal{B})

- ▶ Sei \mathcal{R} die Gleichverteilung auf $[0, \pi)$ mit Dichte f und λ das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} .
- ▶ Dann ist durch $\Lambda(d(p, \alpha)) := \lambda(dp)f(\alpha)\mathbb{I}_{[0, \pi)}(\alpha)$ ein isotropes Maß auf (G, \mathcal{B}) gegeben.

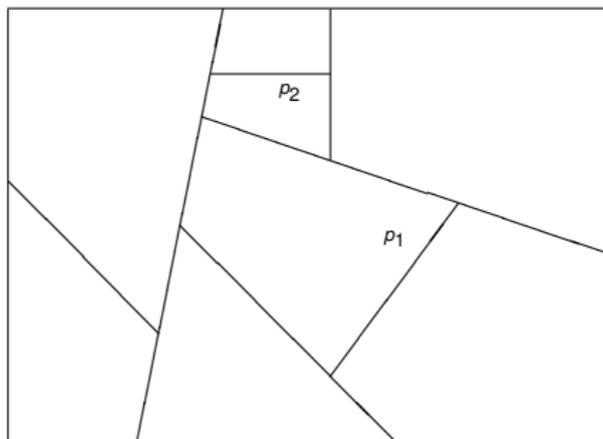
vom Maß zum Wahrscheinlichkeitsmaß

- ▶ Sei $C \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt.
- ▶ Sei $[C] := \{\gamma \in G : C \cap \gamma \neq \emptyset\} \subset G$ die Menge aller Geraden, die C schneiden.
- ▶ Dann ist für alle C mit $\Lambda([C]) \neq 0$
 $\Lambda_C(\cdot) := \frac{\Lambda(\cdot \cap [C])}{\Lambda([C])}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[C]$.

Die Geraden

Anwendung von Λ_C

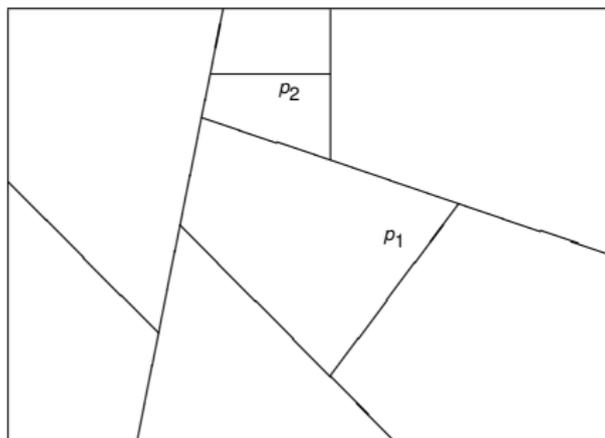
- ▶ Sei $W \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und konvex das Beobachtungsfenster.
- ▶ Für ein beliebiges $\gamma \in G$ ist nun $P(\gamma \cap p_i \neq \emptyset) = \Lambda_W([p_i])$ die Wahrscheinlichkeit, dass γ das Polygon p_i teilt.



Die Geraden

Anschaulich

- ▶ Da $|p_1| > |p_2|$ (mit dem Flächenmaß $|\cdot|$), ist auch $\Lambda([p_1] \cap [W]) > \Lambda([p_2] \cap [W])$ und somit $\Lambda_W([p_1]) > \Lambda_W([p_2])$
- ▶ Also werden kleinere Zellen mit geringerer Wahrscheinlichkeit geteilt als große Zellen.



Konstruktion

Bezeichnungen

- ▶ Sei (τ_i) eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\tau_1 \sim \text{Exp}(\Lambda([W]))$, die Folge der Lebenszeiten der Zellen p_i .
- ▶ Sei $a > 0$ die Stoppzeit.
- ▶ Sei (γ_i) eine Folge unabhängig, isotrop gleichverteilter Geraden in \mathbb{R}^2 .
- ▶ Für jedes i seien γ_i^+ und γ_i^- die beiden Halbebenen, in die γ_i die Ebene teilt.

Algorithmus

- ▶ j - Zeitschritt
- ▶ T - Menge der Paare (Zelle, Geburtszeit)
- ▶ $R(a, W)$ - Menge der Zellen des Mosaikes im Fenster

Konstruktion

Pseudo-Code

$j = 0, T = (W, 0), R = \emptyset$

Für alle $(C, \tau) \in T$, solange bis $T = \emptyset$
erhöhe j

wenn $\tau + \tau_j \leq \mathbf{a}$ (Stoppzeit noch nicht erreicht)

wenn γ_j C teilt

ersetze (C, τ) durch $(C \cap \gamma_j^+, \tau + \tau_j)$ und $(C \cap \gamma_j^-, \tau + \tau_j)$

wenn γ_j C nicht teilt

ersetze (C, τ) durch $(C, \tau + \tau_j)$

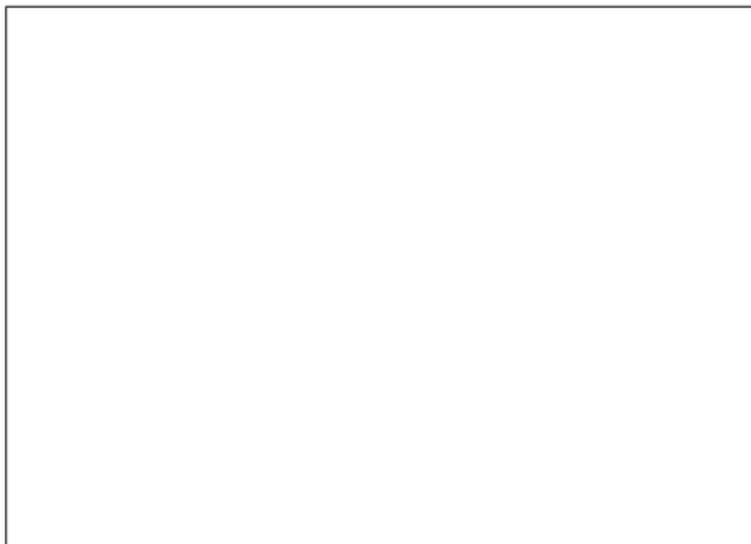
wenn $\tau + \tau_j > \mathbf{a}$ (Stoppzeit erreicht)

entferne (C, τ) aus T

füge C zu den Mosaikzellen in R hinzu

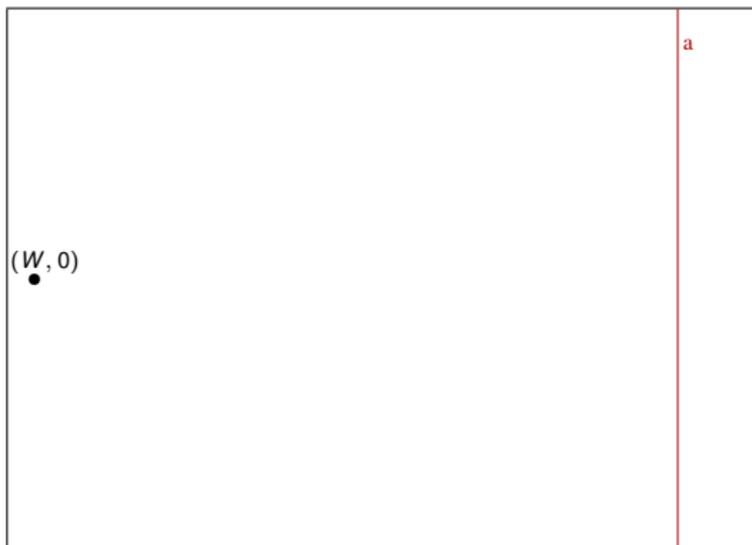
Veranschaulichung

- ▶ $j = 0$
- ▶ leeres Beobachtungsfenster



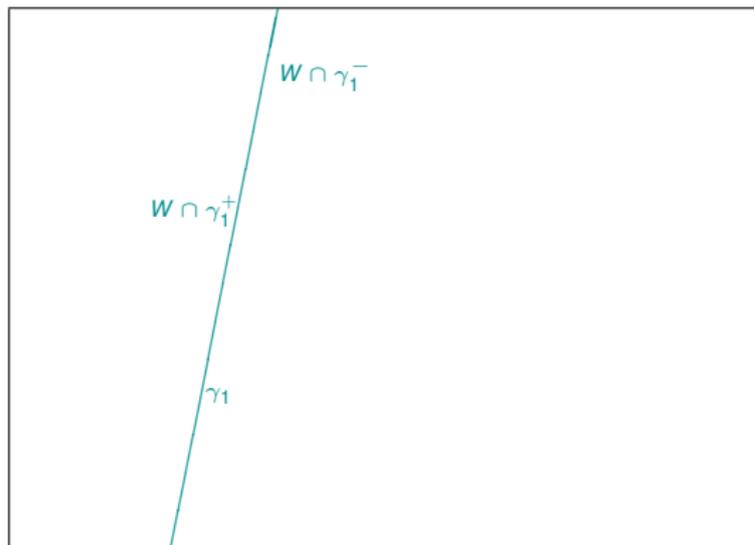
Veranschaulichung

▶ $j = 0$



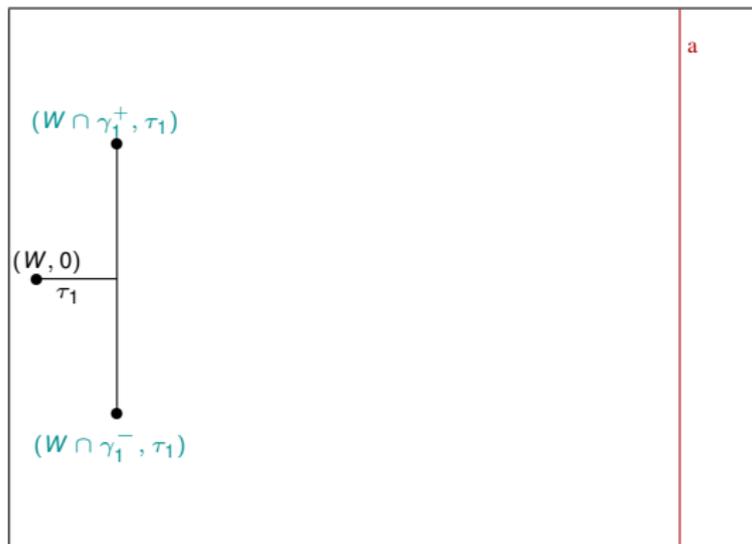
Veranschaulichung

- ▶ $j = 1$
- ▶ γ_1 teilt W



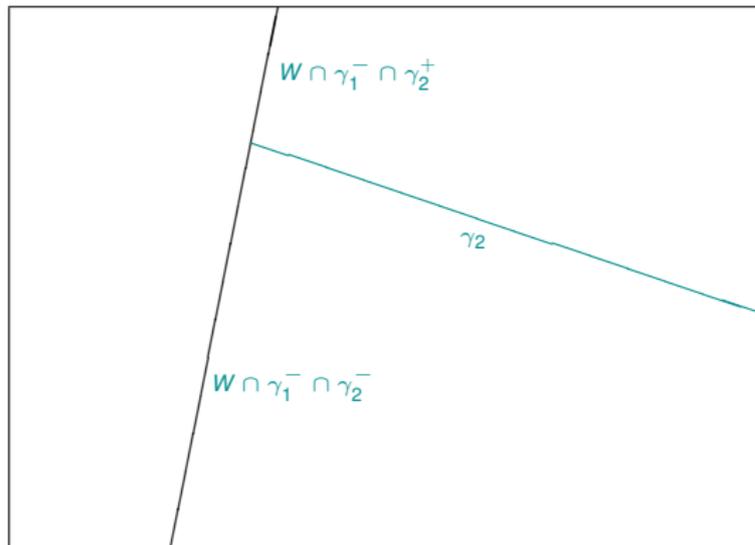
Veranschaulichung

- ▶ $j = 1$
- ▶ $(C, \tau) = (W, 0)$
- ▶ $\tau_1 \leq a$



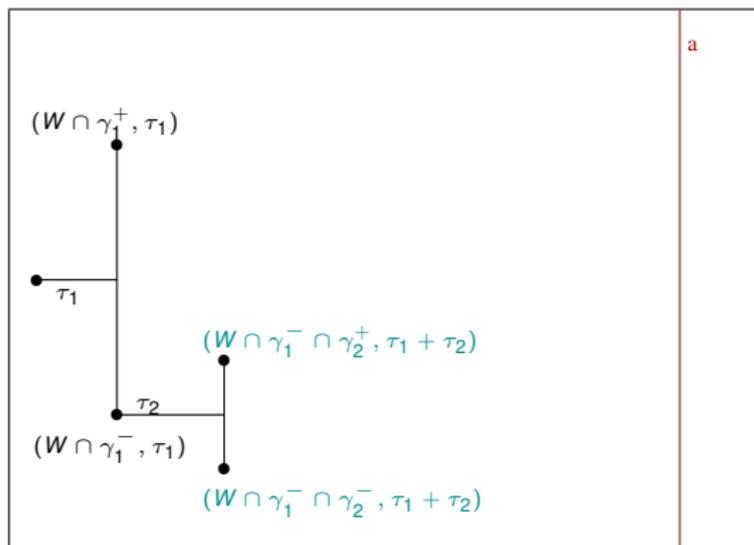
Veranschaulichung

- ▶ $j = 2$
- ▶ γ_2 teilt $W \cap \gamma_1^-$



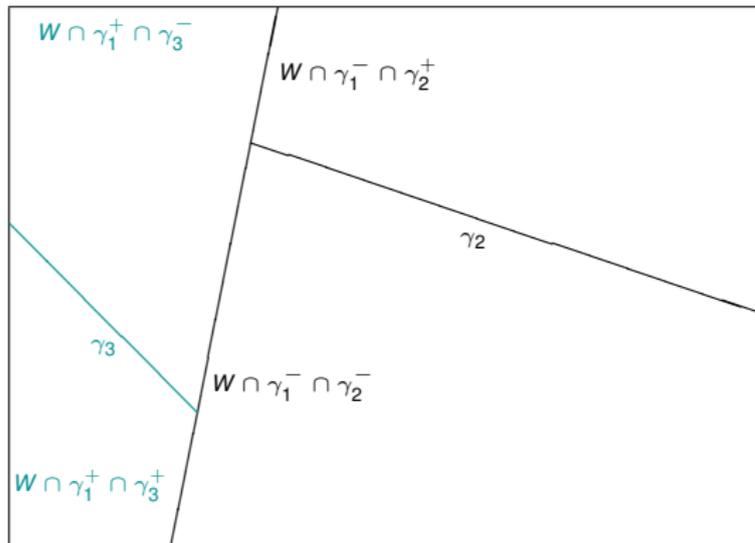
Veranschaulichung

- ▶ $j = 2$
- ▶ $(C, \tau) = (W \cap \gamma_1^-, \tau_1)$
- ▶ $\tau_1 + \tau_2 \leq a$



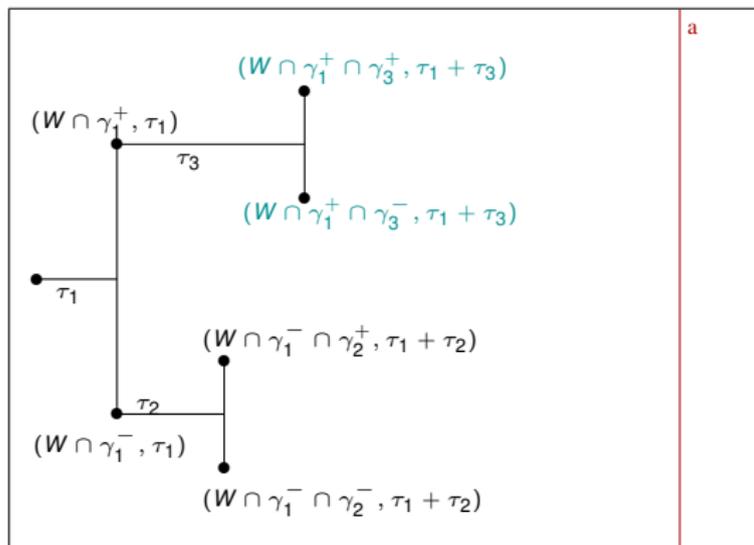
Veranschaulichung

- ▶ $j = 3$
- ▶ γ_3 teilt $W \cap \gamma_1^+$



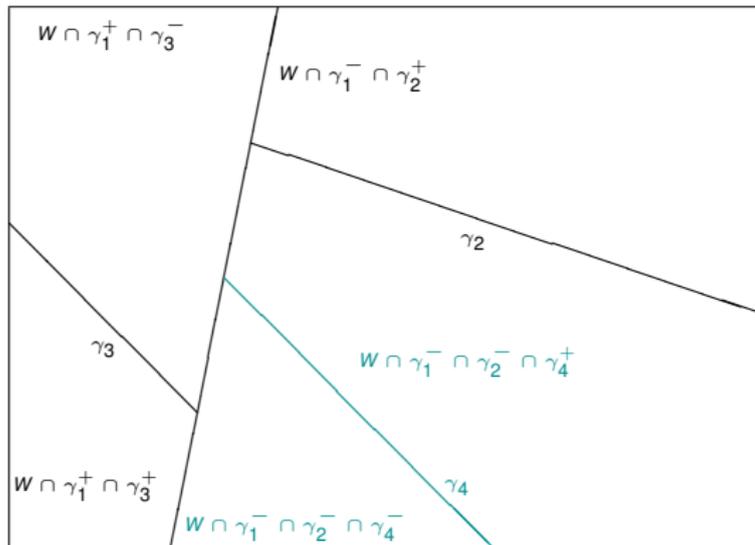
Veranschaulichung

- ▶ $j = 3$
- ▶ $(C, \tau) = (W \cap \gamma_1^+, \tau_1)$
- ▶ $\tau_1 + \tau_3 \leq a$



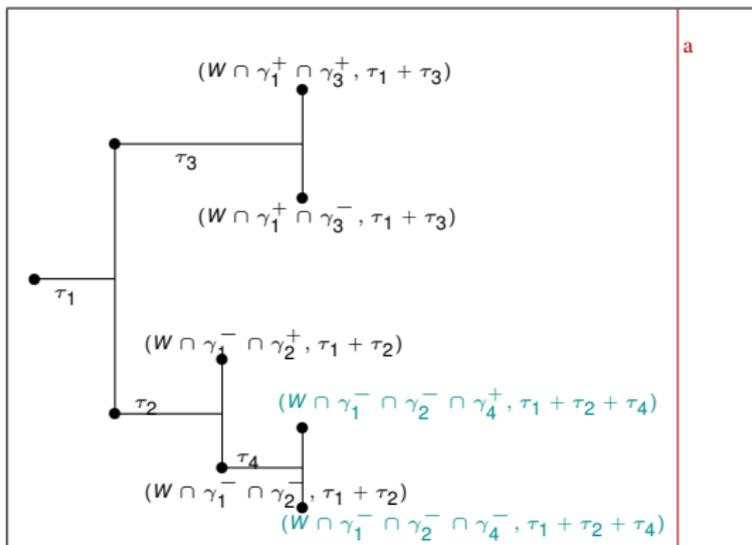
Veranschaulichung

- ▶ $j = 4$
- ▶ γ_4 teilt $W \cap \gamma_1^- \cap \gamma_2^-$



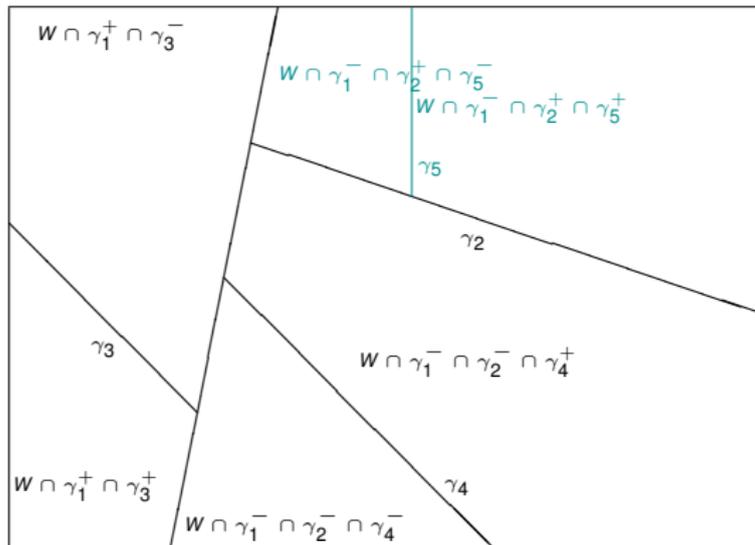
Veranschaulichung

- ▶ $j = 4$
- ▶ $(C, \tau) = (W \cap \gamma_1^- \cap \gamma_2^-, \tau_1 + \tau_2)$
- ▶ $\tau_1 + \tau_2 + \tau_4 \leq a$



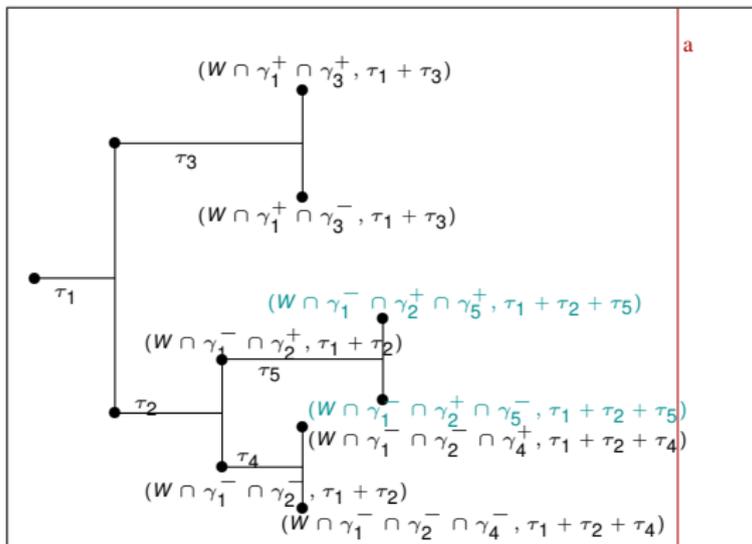
Veranschaulichung

- ▶ $j = 5$
- ▶ γ_5 teilt $W \cap \gamma_1^- \cap \gamma_2^+$



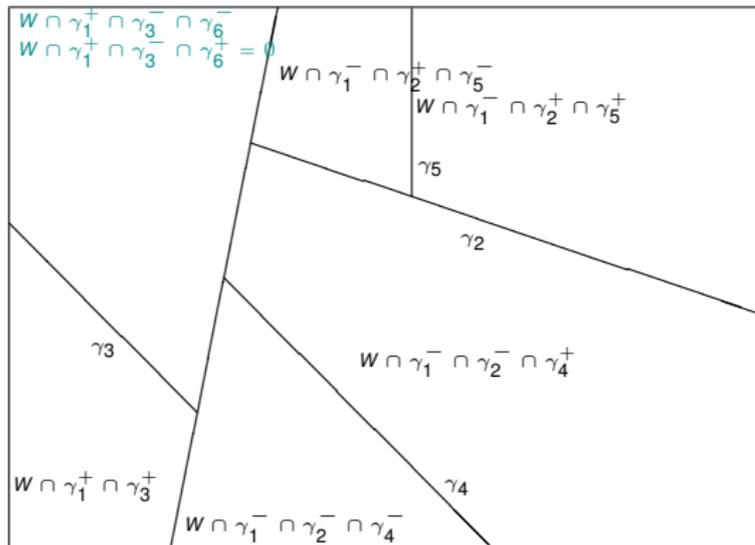
Veranschaulichung

- ▶ $j = 5$
- ▶ $(C, \tau) = (W \cap \gamma_1^- \cap \gamma_2^+, \tau_1 + \tau_2)$
- ▶ $\tau_1 + \tau_3 + \tau_5 \leq a$



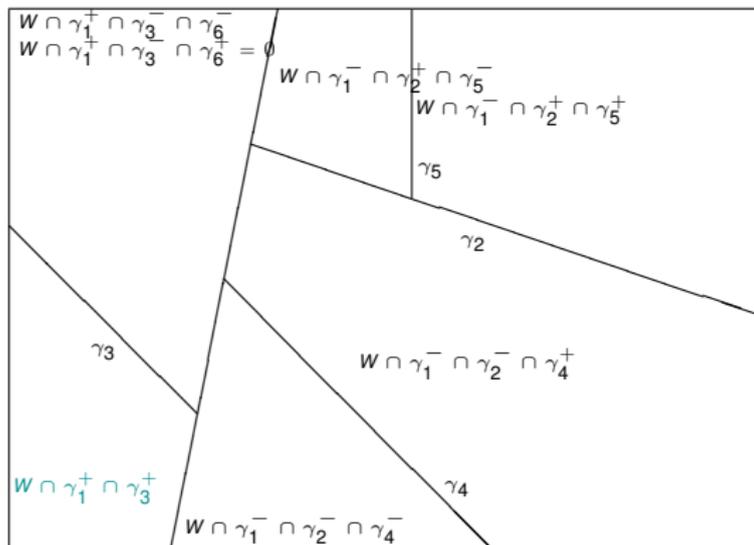
Veranschaulichung

- ▶ $j = 6$
- ▶ γ_6 teilt $W \cap \gamma_1^+ \cap \gamma_3^-$ nicht



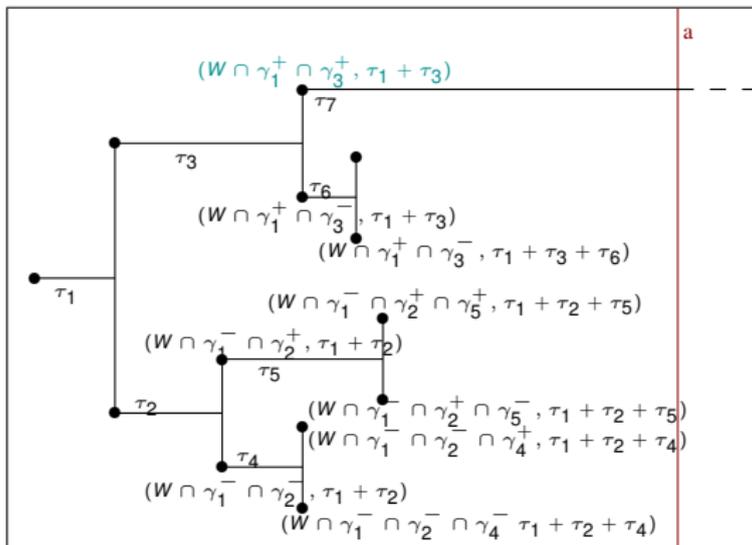
Veranschaulichung

- ▶ $j = 7$
- ▶ γ_7 kann vernachlässigt werden, denn...



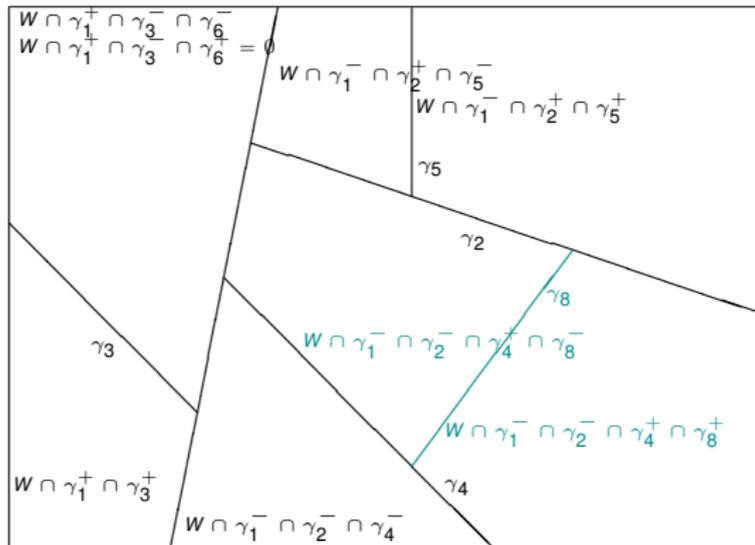
Veranschaulichung

- ▶ $j = 7$
- ▶ $(C, \tau) = (W \cap \gamma_1^- \cap \gamma_3^+, \tau_1 + \tau_3)$
- ▶ $\tau_1 + \tau_3 + \tau_7 > a$



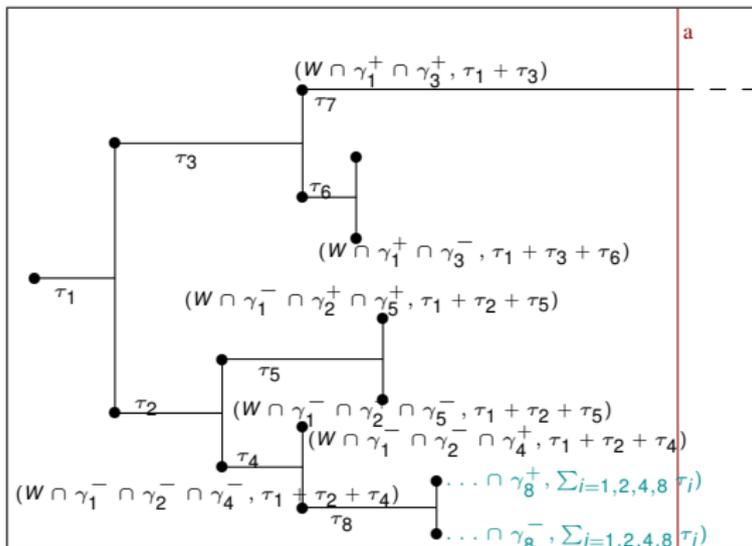
Veranschaulichung

- ▶ $j = 8$
- ▶ γ_8 teilt $W \cap \gamma_1^- \cap \gamma_2^- \cap \gamma_4^-$



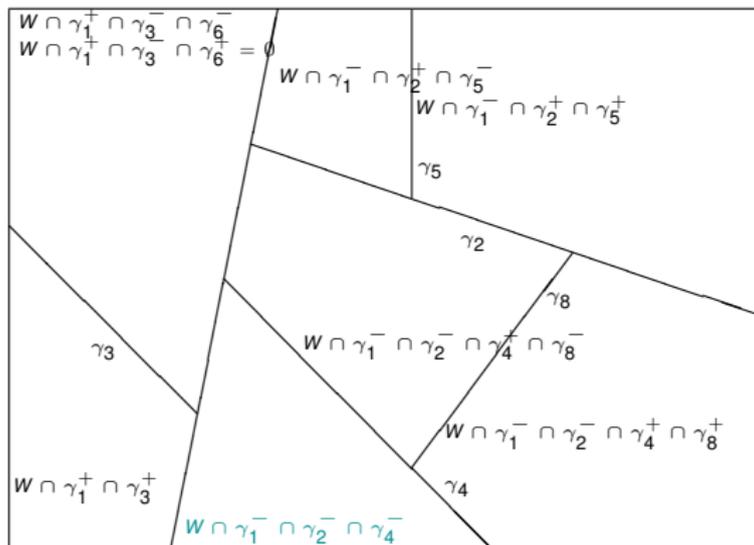
Veranschaulichung

- ▶ $j = 8$
- ▶ $(C, \tau) = (W \cap \gamma_1^- \cap \gamma_2^- \cap \gamma_4^-, \tau_1 + \tau_2 + \tau_4)$
- ▶ $\tau_1 + \tau_2 + \tau_4 + \tau_8 \leq a$



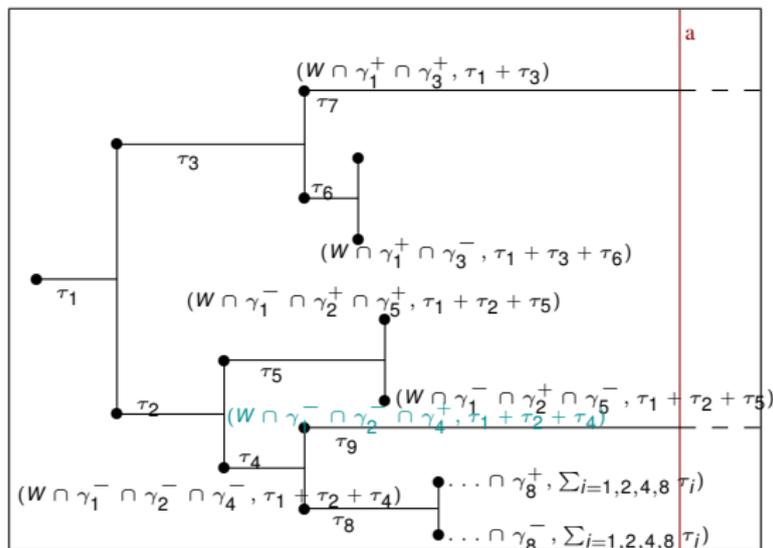
Veranschaulichung

- ▶ $j = 9$
- ▶ γ_9 kann vernachlässigt werden, denn...

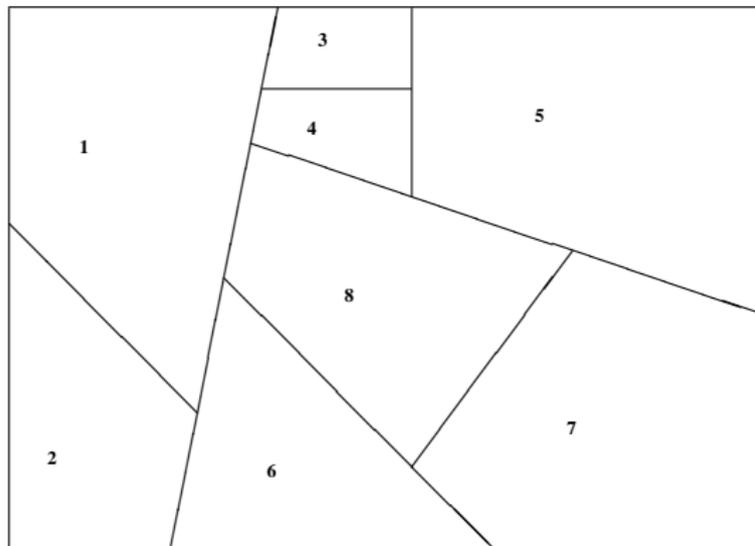


Veranschaulichung

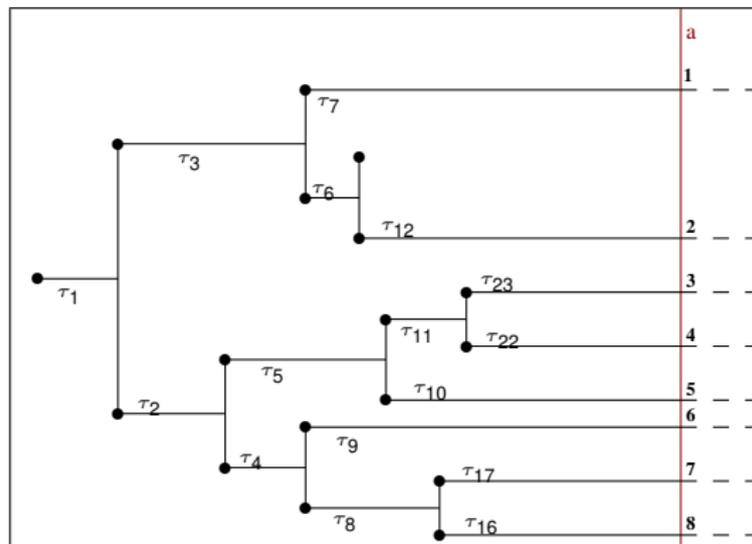
- ▶ $j = 9$
- ▶ $(C, \tau) = (W \cap \gamma_1^- \cap \gamma_2^- \cap \gamma_4^+, \tau_1 + \tau_2 + \tau_4)$
- ▶ $\tau_1 + \tau_2 + \tau_4 + \tau_9 > a$



Endzustand



Finale Knoten im Baum



Formelle Beschreibung

Mosaik als Menge von Zellen

- ▶ Sei $(j_k)_1^n$ eine endliche Indexfolge so, dass $j_{k+1} \in \{2j_k, 2j_k + 1\}$ und

$$n = \max_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^k \tau_{j_i} \leq a.$$

Formelle Beschreibung

Mosaik als Menge von Zellen

- ▶ Sei $(j_k)_1^n$ eine endliche Indexfolge so, dass $j_{k+1} \in \{2j_k, 2j_k + 1\}$ und

$$n = \max_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^k \tau_{j_i} \leq a.$$

- ▶ Sei $s(j_k) \in \{-1, 1\}$ das Vorzeichen des Knotens mit Index j_k so, dass

$$s(j_k) = \begin{cases} 1 & , j_k \text{ ungerade} \\ -1 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

Formelle Beschreibung

Mosaik als Menge von Zellen

- ▶ Sei $(j_k)_1^n$ eine endliche Indexfolge so, dass $j_{k+1} \in \{2j_k, 2j_k + 1\}$ und

$$n = \max_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^k \tau_{j_i} \leq a.$$

- ▶ Sei $s(j_k) \in \{-1, 1\}$ das Vorzeichen des Knotens mit Index j_k so, dass

$$s(j_k) = \begin{cases} 1 & , j_k \text{ ungerade} \\ -1 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

- ▶ Dann ist durch

$$\beta(a) := \left\{ s(j_1) \dots s(j_{k+1}) \in \{1\} \times \{-1, 1\}^k : \sum_{i=1}^k \tau_{j_i} \leq a < \sum_{i=1}^{k+1} \tau_{j_i} \right\}$$

die Menge der Pfade im Baum gegeben.

Formelle Beschreibung

Mosaik als Menge von Zellen

- ▶ Also ist durch

$$R(a, W) := \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^k \gamma_{j_i}^{s(j_i+1)} \right) \cap W : s(j_1) \dots s(j_{k+1}) \in \beta(a) \right\}$$

die Menge der Zellen des Mosaikes im Fenster gegeben.

Formelle Beschreibung

Mosaik als Menge von Zellen

- ▶ Also ist durch

$$R(a, W) := \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^k \gamma_{j_i}^{s(j_i+1)} \right) \cap W : s(j_1) \dots s(j_{k+1}) \in \beta(a) \right\}$$

die Menge der Zellen des Mosaikes im Fenster gegeben.

Mosaik als zufällige abgeschlossene Menge der Kanten

- ▶ Sei $C \in R(a, W)$ eine Zelle der vorangegangenen Konstruktion
- ▶ Dann beschreibt

$$Y(a, W) := \overline{\left(\bigcup_{C \in R(a, W)} \partial C \right)} \setminus \partial W$$

die zufällige abgeschlossene Menge (ZAM) der Kanten des Mosaiks innerhalb von W .

Kapazitätsfunktional

Definition 1

- ▶ Sei $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ eine ZAM und $P_{\Xi}(B) = P(\Xi \in B)$
 $\forall B \in \text{Sigmaalgebra von } \mathcal{F}$ die Verteilung von Ξ
- ▶ Die Abbildung $T_{\Xi} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ mit $T_{\Xi}(C) = P(\Xi \cap C \neq \emptyset) \forall C \in \mathcal{C}$ nennt man das Kapazitätsfunktional von Ξ , wobei \mathcal{C} die Menge aller kompakter Mengen ist.

Kapazitätsfunktional

Definition 1

- ▶ Sei $\Xi : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ eine ZAM und $P_{\Xi}(B) = P(\Xi \in B)$
 $\forall B \in \text{Sigmaalgebra von } \mathcal{F}$ die Verteilung von Ξ
- ▶ Die Abbildung $T_{\Xi} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ mit $T_{\Xi}(C) = P(\Xi \cap C \neq \emptyset) \forall C \in \mathcal{C}$ nennt man das Kapazitätsfunktional von Ξ , wobei \mathcal{C} die Menge aller kompakter Mengen ist.

Satz 1

- ▶ Seien $\Xi_1, \Xi_2 : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ zwei beliebige ZAM
- ▶ Es gilt $P_{\Xi_1} = P_{\Xi_2}$ genau dann, wenn $T_{\Xi_1} = T_{\Xi_2}$

Kapazitätsfunktional

Lemma 1

- ▶ Wenn $C \in \mathcal{C}$ zusammenhängend ist mit $C \subset W$ und $a > 0$
- ▶ Dann gilt: $1 - T_{Y(a,W)}(C) = P(Y(a,W) \cap C = \emptyset) = \exp(-a \cdot \Lambda([C]))$.

Kapazitätsfunktional

Lemma 1

- ▶ Wenn $C \in \mathcal{C}$ zusammenhängend ist mit $C \subset W$ und $a > 0$
- ▶ Dann gilt: $1 - T_{Y(a,W)}(C) = P(Y(a,W) \cap C = \emptyset) = \exp(-a \cdot \Lambda([C]))$.

Bemerkung

- ▶ Anhand des Lemma 1 kann man eine rekursive Darstellung des Kapazitätsfunktionals für alle kompakte Mengen mit endlich vielen zusammenhängenden Komponenten geben.

Vom Fenster zur Ebene

Lemma 2 - Lokale Endlichkeit

- ▶ Wenn $0 < \Lambda([W]) < \infty$, dann ist $R(a, \bar{W})$ fast sicher endlich für alle $a > 0$.

Vom Fenster zur Ebene

Lemma 2 - Lokale Endlichkeit

- ▶ Wenn $0 < \Lambda([W]) < \infty$, dann ist $R(a, \bar{W})$ fast sicher endlich für alle $a > 0$.

Beobachtung

- ▶ Das so konstruierte Mosaik ist durch den Parameter a eindeutig bestimmt.

Vom Fenster zur Ebene

Satz 2 - Mosaik in der gesamten Ebene

- Für alle $a > 0$ gibt es ein ein Mosaik $Y(a)$ auf \mathbb{R}^2 so, dass

$$Y(a) \cap W \stackrel{D}{=} Y(a, W).$$

Vom Fenster zur Ebene

Satz 2 - Mosaik in der gesamten Ebene

- ▶ Für alle $a > 0$ gibt es ein ein Mosaik $Y(a)$ auf \mathbb{R}^2 so, dass

$$Y(a) \cap W \stackrel{D}{=} Y(a, W).$$

Hilfssatz für Beweis

- ▶ Sei $W_j := [-j, j]^2$, $j = 1, 2, \dots$ eine Folge von Beobachtungsfenstern. Damit ist $W_j \subset W_{j+1}$ und $W_j \uparrow \mathbb{R}^2$.
- ▶ Sei Y_j eine Folge von ZAM in \mathbb{R}^2 mit $Y_l \cap W_i \stackrel{D}{=} Y_i$ für alle $l > i$.
- ▶ Dann gibt es eine ZAM Y in \mathbb{R}^2 mit $Y \cap W_i \stackrel{D}{=} Y_i \forall i \in \mathbb{N}$.

Vom Fenster zur Ebene

Satz 2 - Mosaik in der gesamten Ebene

- ▶ Für alle $a > 0$ gibt es ein ein Mosaik $Y(a)$ auf \mathbb{R}^2 so, dass

$$Y(a) \cap W \stackrel{D}{=} Y(a, W).$$

Hilfssatz für Beweis

- ▶ Sei $W_j := [-j, j]^2$, $j = 1, 2, \dots$ eine Folge von Beobachtungsfenstern. Damit ist $W_j \subset W_{j+1}$ und $W_j \uparrow \mathbb{R}^2$.
- ▶ Sei Y_j eine Folge von ZAM in \mathbb{R}^2 mit $Y_l \cap W_j \stackrel{D}{=} Y_j$ für alle $l > j$.
- ▶ Dann gibt es eine ZAM Y in \mathbb{R}^2 mit $Y \cap W_j \stackrel{D}{=} Y_j \forall j \in \mathbb{N}$.
- ▶ Für den folgenden Beweis setzen wir: $Y_j = Y(a, W_j)$

STIT

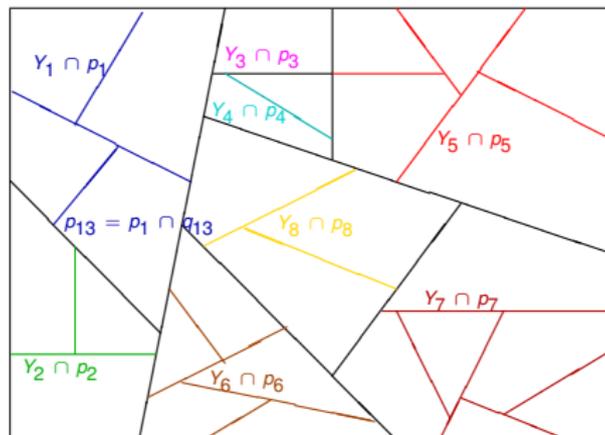
einfache Iteration

- ▶ Sei Y_0 ein Mosaik und $\mathcal{Y} := \{Y_1, Y_2, \dots\}$ eine Folge von unabhängig identisch verteilten Mosaiken mit der gleichen Verteilung wie Y_0 .
- ▶ Sei $C(Y_0) := \{p_1, p_2, \dots\}$ die abzählbare Menge der Zellen von Y_0 .
- ▶ Dann ist durch

$$I(Y_0, \mathcal{Y}) := Y_0 \cup \bigcup_{p_i \in C(Y_0)} (Y_i \cap p_i)$$

die Iteration von Y_0 mit \mathcal{Y} gegeben.

STIT



Bezeichnungen

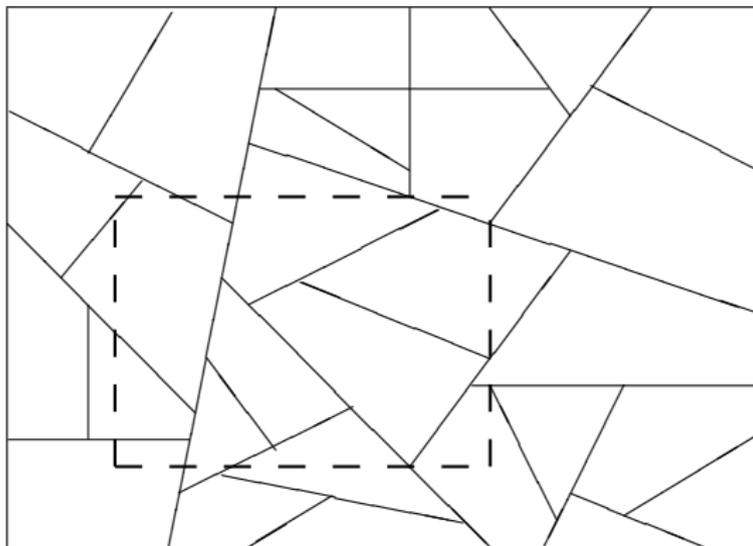
- ▶ Wir nennen Y_0 das Rahmenmosaik, und $Y_i \in \mathcal{Y}$ Untermosaik.
- ▶ Sei $C(Y_i) = \{q_{i1}, q_{i2}, \dots\}$ die Menge der Zellen von Y_i .
- ▶ Dann bezeichnen wir die Zellen des iterierten Mosaikes mit $p_{ik} := p_i \cap q_{ik}$.

STIT

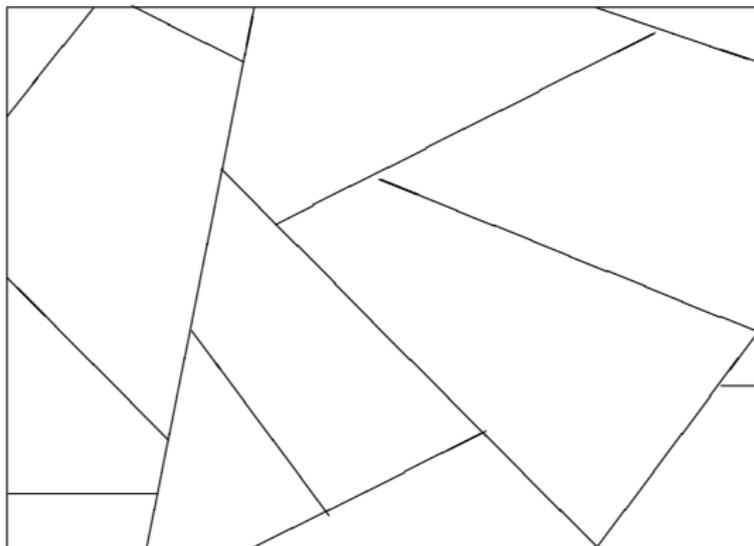
Skalierung

- Für ein $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ein Mosaik Y bezeichne $rY := \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{r}x \in Y\}$ das mit r skalierte Mosaik und $r\mathcal{Y} := \{rY_1, rY_2, \dots : Y \in \mathcal{Y} \text{ für } i = 1, 2, \dots\}$ eine Folge skaliertes Mosaik.

Vorher



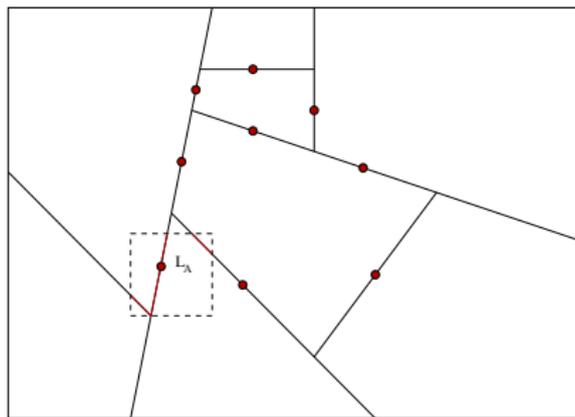
Nachher



STIT

Kantenlängenintensität

- Die *Kantenlängenintensität* eines Mosaiks bezeichnet den Erwartungswert der Länge der Strecken im Einheitsquadrat.



STIT

Bemerkung

- ▶ Seien $Y_1(a)$ und $Y_2(a)$ zwei Mosaik nach obigem Algorithmus konstruiert. Dabei bleibt Λ unverändert.
- ▶ Also ist $Y_1(a) \stackrel{D}{=} Y_2(a)$.
- ▶ Aber gleichzeitig ist $L_A(Y_1(a)) = L_A(Y_2(a))$.

STIT

Bemerkung

- ▶ Seien $Y_1(a)$ und $Y_2(a)$ zwei Mosaik nach obigem Algorithmus konstruiert. Dabei bleibt Λ unverändert.
- ▶ Also ist $Y_1(a) \stackrel{D}{=} Y_2(a)$.
- ▶ Aber gleichzeitig ist $L_A(Y_1(a)) = L_A(Y_2(a))$.

Lemma 3

- ▶ Zwei Mosaik im Sinne des Konstruktionsprinzips sind identisch verteilt, wenn sie die gleiche Kantenintensität haben.

STIT

Bemerkung

- ▶ Seien $Y_1(a)$ und $Y_2(a)$ zwei Mosaik nach obigem Algorithmus konstruiert. Dabei bleibt Λ unverändert.
- ▶ Also ist $Y_1(a) \stackrel{D}{=} Y_2(a)$.
- ▶ Aber gleichzeitig ist $L_A(Y_1(a)) = L_A(Y_2(a))$.

Lemma 3

- ▶ Zwei Mosaik im Sinne des Konstruktionsprinzips sind identisch verteilt, wenn sie die gleiche Kantenintensität haben.
- ▶ Daher ist $Y \stackrel{D}{=} 2I(Y, \mathcal{Y})$ und $2L_A(Y(a)) = L_A(I_2(Y))$

STIT

Bemerkung

- ▶ Seien $Y_1(a)$ und $Y_2(a)$ zwei Mosaik nach obigem Algorithmus konstruiert. Dabei bleibt Λ unverändert.
- ▶ Also ist $Y_1(a) \stackrel{D}{=} Y_2(a)$.
- ▶ Aber gleichzeitig ist $L_A(Y_1(a)) = L_A(Y_2(a))$.

Lemma 3

- ▶ Zwei Mosaik im Sinne des Konstruktionsprinzips sind identisch verteilt, wenn sie die gleiche Kantenintensität haben.
- ▶ Daher ist $Y \stackrel{D}{=} 2I(Y, \mathcal{Y})$ und $2L_A(Y(a)) = L_A(I_2(Y))$
- ▶ sowie $aY(a) \stackrel{D}{=} Y(1)$ und $aL_A(Y(a)) = L_A(Y(1))$.

STIT

Erhaltung der Kantenintensität

- ▶ Sei $L_A(Y)$ die Kantenintensität des Mosaikes Y .
- ▶ Da die Y_i für $i = 0, 1, \dots$ identisch verteilt sind, ist $L_A(Y_i) = L_A(Y_0)$ für $i = 1, 2, \dots$
- ▶ Daher ist $L_A(I(Y_0, \mathcal{Y})) = 2L_A(Y_i)$ für $i = 0, 1, \dots$
- ▶ Eine skalierte Iteration unter Erhaltung der Kantenintensität ist daher $l_2(Y_0) := I(2Y_0, 2\mathcal{Y})$.

STIT

beliebige Iteration

- ▶ Ist nun $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \dots$ Eine Folge von Mosaikfolgen so, dass alle auftretenden Mosaik identisch verteilt sind, dann ist eine beliebige Iteration von Mosaiken gegeben durch:

$$I_3(Y_0) = (I(3Y_0, 3\mathcal{Y}_1), 3\mathcal{Y}_2) = I\left(\frac{3}{2}I_2(Y_0), 3\mathcal{Y}_2\right)$$

- ▶ und somit

$$I_m(Y_0) = I\left(\frac{m}{m-1}I_{m-1}(Y_0), m\mathcal{Y}_{m-1}\right) \text{ für } m = 3, 4, \dots$$

STIT

Definition 2

- ▶ Ein Mosaik Y heißt *stabil unter Iteration* (STIT), wenn

$$Y \stackrel{D}{=} I_m(Y) \quad \forall m \geq 2.$$

STIT

Definition 2

- ▶ Ein Mosaik Y heißt *stabil unter Iteration* (STIT), wenn

$$Y \stackrel{D}{=} I_m(Y) \quad \forall m \geq 2.$$

Satz 3

- ▶ $Y(a)$ aus Satz 2 ist STIT.

Vergleich mit dem Poisson-Linien-Mosaik

Typische Zelle

- ▶ Die typische Zelle ist über die Palmverteilung definiert. Intuitiv kann man unter einer typischen Zelle eine zufällig ausgewählte Zelle eines Mosaikes verstehen.

Vergleich mit dem Poisson-Linien-Mosaik

Typische Zelle

- ▶ Die typische Zelle ist über die Palmverteilung definiert. Intuitiv kann man unter einer typischen Zelle eine zufällig ausgewählte Zelle eines Mosaikes verstehen.

Lemma 4

- ▶ Sei $STIT_0$ die Verteilung der typischen Zelle eines stationären und isotropen STIT-Mosaikes mit Kantenlängenintensität L_A und PLT_0 die Verteilung der typischen Zelle eines stationären und isotropen Poisson-Linien-Mosaikes (PLT) mit der gleichen Kantenlängenintensität.
- ▶ Dann gilt: $STIT_0 = PLT_0$

Schwache Konvergenz

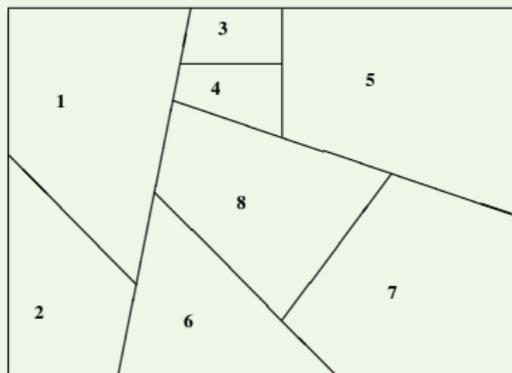
Satz 4

- ▶ Sei X ein beliebiges stationäres Mosaik in \mathbb{R}^2 mit $0 < L_A < \infty$.
- ▶ Dann gilt: $\lim_{m \rightarrow \infty} T_{I_m(X)}(C) = T_{Y(1)}(C) \forall C \in \mathcal{C}$
- ▶ Nach einer Grenzwertvertauschung gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} I_m(X) = Y(1)$ und somit die die schwache Konvergenz.

Topologische Eigenschaften

T-Knoten

- ▶ Wenn man überprüfen will, ob das Crack- STIT- Mosaik ein geeignetes Modell sein könnte, untersucht man zuerst die topologischen Eigenschaften, wie zum Beispiel die auftretenden Knotenformen.



- ▶ Das Crack-STIT-Mosaik hat fast sicher nur T-Knoten.

Variationskoeffizient

Definition 3

- ▶ Sei X eine Zufallsvariable. Dann ist der Variationskoeffizient gegeben durch:
- ▶
$$\text{VarK}(X) := \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)}$$

Variationskoeffizient

Definition 3

- ▶ Sei X eine Zufallsvariable. Dann ist der Variationkoeffizient gegeben durch:
- ▶
$$\text{VarK}(X) := \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)}$$

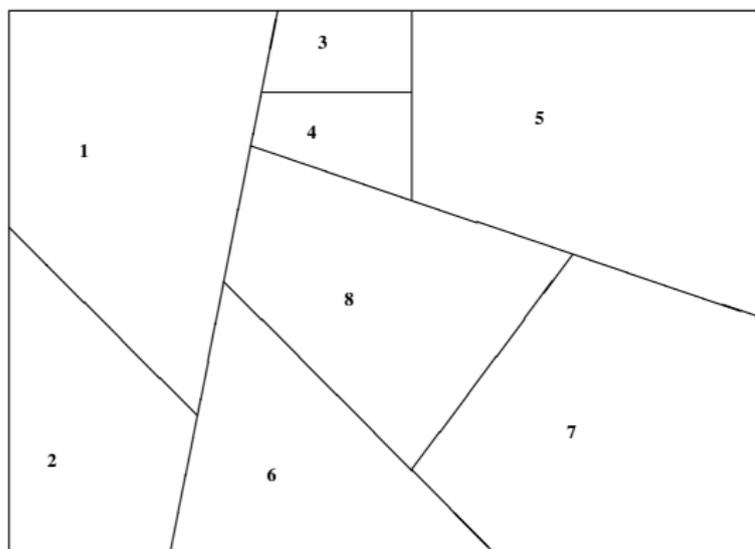
Spezialfall

- ▶ In unserem Fall verwenden wir als ZV A_2 (den Flächeninhalt einer typischen Zelle)
- ▶ Der theoretische Wert des Variationskoeffizienten eines Crack-STIT-Mosaikes (gewonnen aus Kenntnissen über die PLT) beträgt:
- ▶
$$f = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1} \approx 1.98, \text{ da } E(A_2) = \frac{\pi}{(L_A)^2} \text{ und } \text{Var}(A_2) = \frac{(\frac{\pi^2}{2} - 1) \cdot \pi^2}{(L_A)^4}$$

Beispiel

Modell

► $f_0 = 1,98$



Beispiel

Porzellanmuster

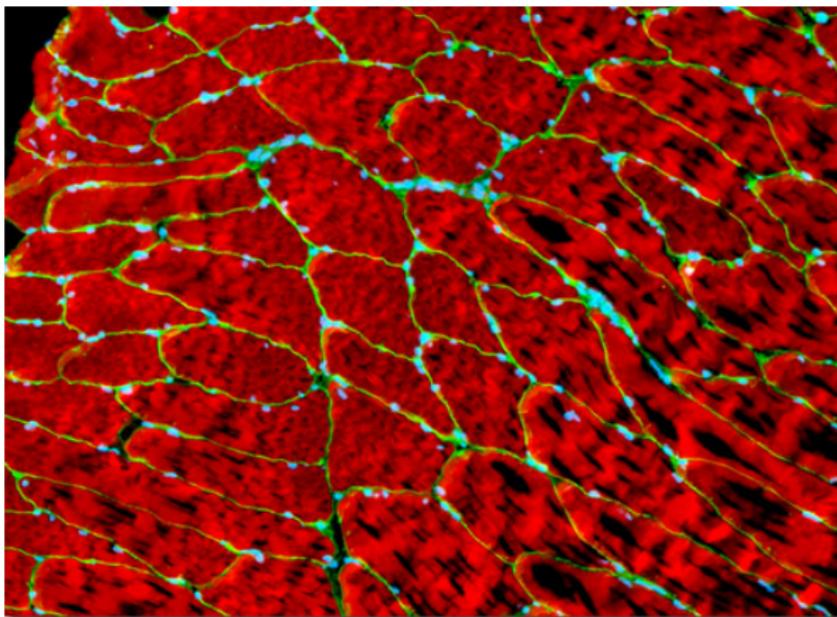
- ▶ $f_2 = 0,90$



Beispiel

Muskulatur

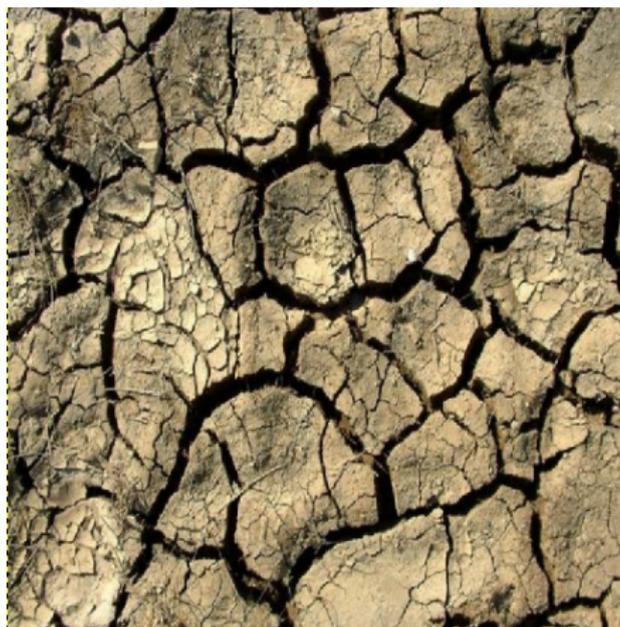
▶ $f_1 = 0,53$



Beispiel

Risse in der Erde

- ▶ $f_3 = 0,45$



Kontaktverteilungsfunktion

Definition 4

- ▶ Sei Y eine ZAM. Die lineare Kontaktverteilungsfunktion (KVF) mit der Länge $l > 0$ für horizontale Segmente s_l ist im isotropen Fall gegeben durch:
- ▶ $F_C(l) = P(Y \cap s_l \neq \emptyset)$.

Kontaktverteilungsfunktion

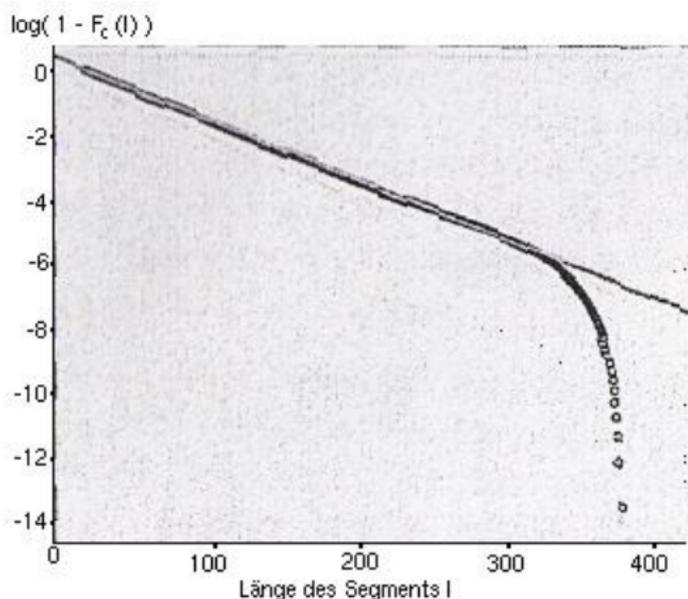
Definition 4

- ▶ Sei Y eine ZAM. Die lineare Kontaktverteilungsfunktion (KVF) mit der Länge $l > 0$ für horizontale Segmente s_l ist im isotropen Fall gegeben durch:
- ▶ $F_C(l) = P(Y \cap s_l \neq \emptyset)$.

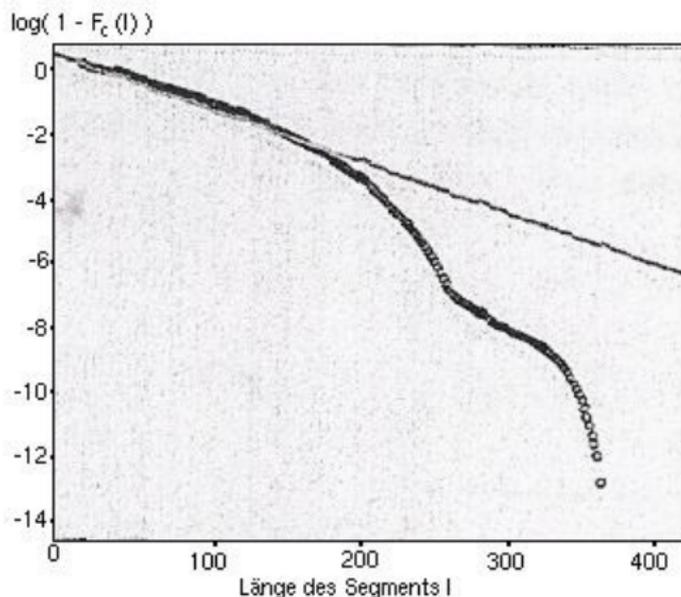
Spezialfall

- ▶ In unserem Fall verwenden wir alle Kantenpunkte als ZAM Y . Da wir von der typischen Zelle einer PLT auch auf das Crack-STIT-Mosaik schließen können, wissen wir, dass die lineare KVF eine Exponentialfunktion ist. Mit $a = \frac{2}{\pi} \cdot L_A$ erhalten wir für den isotropen Fall:
- ▶ $F_C(l) = P(Y \cap s_l \neq \emptyset) = 1 - \exp(-a \cdot l)$.
- ▶ $\Rightarrow \ln(1 - F_C(l)) = -a \cdot l$
- ▶ Mit diesen Kenntnissen kann man überprüfen, ob die geschätzte logarithmische KVF approximativ linear ist.

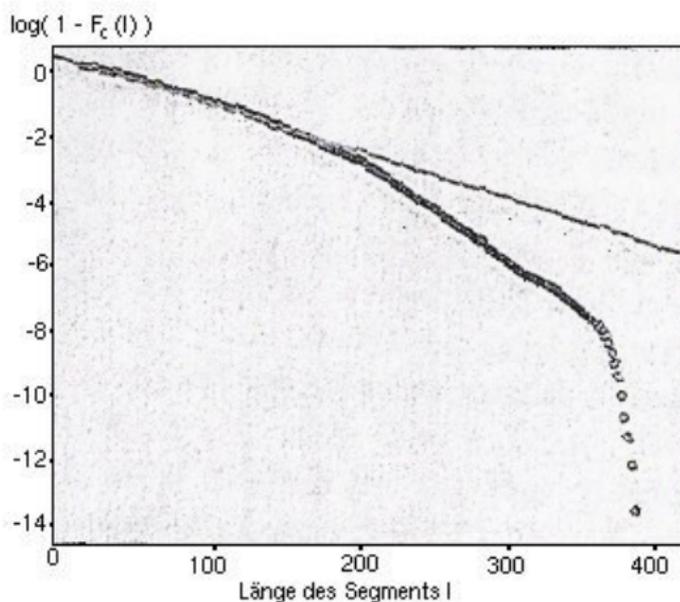
Logarithmische Kontaktverteilungsfunktion - Simulation



Logarithmische Kontaktverteilungsfunktion - Porzellan



Logarithmische Kontaktverteilungsfunktion - Titanlegierung



Ausblick

- ▶ Man kann auch mehrdimensionale STIT-Mosaik betrachten. Das Verfahren ist in 3D das Gleiche. Man betrachtet nur ein Raum als Fenster und Hyperebenen statt Geraden. Allerdings erhält man mehr Mittelwerte als in 2D.
- ▶ Wie in den Bildern gesehen, sind die Zellschranken nicht linear sondern gekrümmt. Daher wäre es angebracht, statt Geraden Kurven zu verwenden.

Quellen

- ▶ NAGEL, W., MECKE, J., OHSER J., WEISS, V.: *A Tessellation Model for Crack Patterns on Surfaces*, Image Ana1 Stereol, 2006
- ▶ NAGEL, W., WEISS, V.: *Mean Values for Homogeneous STIT Tessellations in 3D*, Image Ana1 Stereo1, 2007
- ▶ NAGEL, W., WEISS, V.: *STIT Tessellations in the Plane*, Reconti del Circolo Matematico di Palermo, 2006
- ▶ NAGEL, W., WEISS, V.: *Crack STIT Tessellations: Characterization of Stationary Random Tessellations with Respect to Iteration*, Advances in Applied Probability, 2005
- ▶ SCHNEIDER R., WEIL W.: *Stochastische Geometrie*, Teubner, Leipzig, 2000
- ▶ SCHMIDT, V.: *Räumliche Statistik*, Universität Ulm, 2007

Bildnachweis

- ▶ <http://www.microscopyu.com/galleries/fluorescence/ratskeletalmuscle/ratskeletalmusclelarge.html>
- ▶ <http://www.ragoarts.com/onlinecats/03.07AC/017.jpg>
- ▶ <http://www.gimpusers.com/images/tutorials/104/2.png>