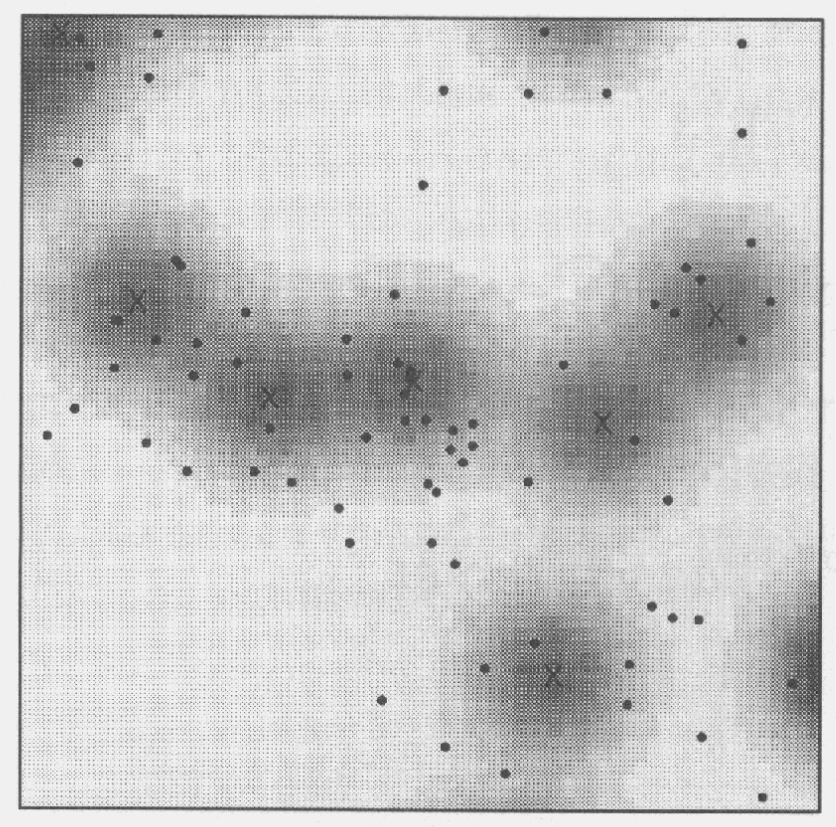

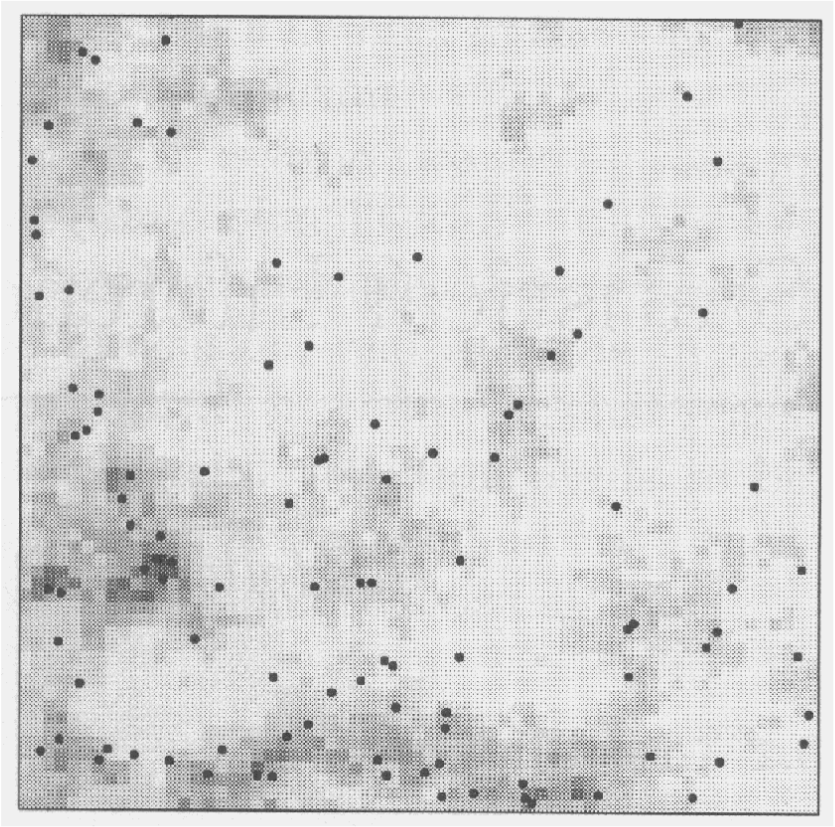

Statistical Inference for Cox-Processes

Michael Weyhmüller, Jian Zhang | 15. Juli 2008 |

Inhaltsverzeichnis

Poisson-Prozesse

Cox-Prozesse

Neyman-Scott-Prozess als Cox-Prozess

Log-Gauß-Cox-Prozess

Schätzer (für parametrische Modelle von Cox-Prozessen)

Zufälliges Zählmaß

- $\mathbb{N}$: Familie aller lokal endlichen Zählmaße $\varphi : B(\mathbb{R}^d) \to \{0, 1, \dots\} \bigcup \{\infty\}$.
- $\mathcal{N}$: kleinste σ-Algebra von Teilmengen von $\mathbb{N}$, so daß $\varphi \mapsto \varphi(B)$ für jedes beschränkte $B \in B(\mathbb{R}^d)$ eine $(\mathcal{N}, B(\mathbb{R}))$-messbare Abbildung ist.

Ein zufälliges Zählmaß $N : \Omega \to \mathbb{N}$ ist eine Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in dem messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$,
d.h. N ist ein (mengen-indizierter) stochastischer Prozess $\{N_B : B \in B(\mathbb{R}^d)\}$ über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass $\{N_B(\omega), B \in B(\mathbb{R}^d)\}$ für jedes $\omega \in \Omega$ ein lokal endliches Zählmaß aus $\mathbb{N}$ ist.

Poisson-Prozesse

- $B_0(\mathbb{R}^d)$: Familie aller beschränkten Borel-Mengen in $\mathbb{R}^d$.
- $\mu : B(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ ein beliebiges lokal-endliches Maß, d.h., $\mu(B) < \infty, \forall B \in B_0(\mathbb{R}^d)$.

Man sagt, dass $\{N_B : B \in B_0(\mathbb{R}^d)\}$ ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß μ ist, wenn

- $N_{B_1}, N_{B_2}, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen sind für paarweise disjunkte $B_1, B_2, \ldots \in B_0(\mathbb{R}^d)$.
- $N_B \sim Poi(\mu(B)), \forall B \in B_0(\mathbb{R}^d)$.

Intensitätsmaß μ (fest)

- wenn μ proportional zum d-dimensionalen Lebesgue-Maß ν_d ist, d.h. für eine Konstante $\kappa \in (0, \infty)$ gilt
$$\mu(B) = \kappa\nu_d(B), \forall B \in B_0(\mathbb{R}^d)$$
dann ist $\{N_B : B \in B_0(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess.
- wenn μ absolutstetig bzgl. des d-dimensionalen Lebesgue-Maßes ist, d.h. wenn es eine Borel-messbare Funktion $\rho : (\mathbb{R}^d) \mapsto [0, \infty)$ gibt, so dass
$$\mu(B) = \int_B \rho(x)dx, \forall B \in B_0(\mathbb{R}^d)$$
dann wird ρ die Intensitätsfunktion des Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ genannt.

Simulation Poisson-Prozess auf Fenster W

Sei W ein vorgegebenes Rechteck

- Generiere eine Realisierung von $N_W \sim Poi(\mu(W))$.
- Falls $N_W = k$, dann generiere k unabhängige Zufallsvektoren

$$S_1, \ldots, S_k \sim \mu(\cdot \bigcap W)/\mu(W).$$

Cox-Prozesse

- $\{M_B : B \in B(\mathbb{R}^d)\}$ ein beliebiges zufälliges Maß, das mit Wahrscheinlichkeit 1 lokal-endlich ist.
- Das zufällige Zählmaß $\{N_B : B \in B(\mathbb{R}^d)\}$ wird Cox-Prozess mit zufälligem Intensitätsmaß M genannt, wenn

$$P(\bigcap_{i=1}^n \{N_{B_i} = k_i\}) = E(\prod_{i=1}^n \frac{M_{B_i}^{k_i}}{k_i!} \exp(-M_{B_i}))$$

für beliebige $n \geq 1, k_1, k_2, \cdots \geq 0$ und paarweise disjunkte $B_1, B_2, \cdots \in B_0(\mathbb{R}^d)$.

Cox-Prozesse

- Ein zufälliges Feld ist eine Familie von Zufallsvariablen $\{Z(x), x \in \mathbb{R}^d\}$ über einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{R}$.
- Ein zufälliges Feld ist also eine messbare Abbildung Z von $(\Omega, \mathcal{A})$ in den messbaren Raum $(G^d, \mathcal{G}^d)$ mit:
  $G^d = \{g \mid g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\}$
  $\mathcal{G}^d = \sigma(\{g \in G^d \mid g(t_j) \in B_j, j = 1, \ldots, m\})$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und halboffene Intervalle B_j in $\mathbb{R}$.
- $Z(x)$ ist der Wert der ω zugeordneten Funktion $g \in G^d$ an der Stelle x.

Cox-Prozesse

- In unserem Vortrag nehmen wir an: $Z(x)$ ist integrierbar, d.h. $\forall \omega \in \Omega, B \in B_0(\mathbb{R}^d) : \int_B Z(x)dx$ existiert.
- Beachte:

$$M_B = \int_B Z(x)dx$$

wobei $Z(x) : \Omega \to [0, \infty)$ ein beliebiges nicht negatives messbares Zufallsfeld mit $E(Z(x)) < \infty, \forall x \in \mathbb{R}^d$ ist.

Eigenschaften

$\forall B_1, B_2, B \in B_0(\mathbb{R}^d)$ gilt:

- $E(N_B) = E(M_B)$
- $Cov(N_{B_1}, N_{B_2}) = Cov(M_{B_1}, M_{B_2}) + E(M_{B_1 \cap B_2})$
  - $Var(N_B) = Var(M_B) + E(M_B)$
  - $Var(N_B) \geq E(M_B) = E(N_B)$
    $Var(N_B) = E(N_B)$, wenn $Var(M_B) = 0$
    d.h. M_B ist fest, N_B ist Poisson-Prozess.

Nichtparametrische Schätzer

- Intensitätsfunktion bei Cox-Prozessen:
$$\rho(x) = E(Z(x))$$
- Paar-Korrelations-Funktion bei Cox-Prozessen:
$$g(x_1, x_2) = \frac{E(Z(x_1)Z(x_2))}{\rho(x_1)\rho(x_2)}$$
bei Poisson-Prozessen : $g \equiv 1$
bei stationären Cox-Prozessen: $g(x_1, x_2) = g_0(x_1 - x_2)$

Exkurs: stationärer Punktprozess

Für beliebige $B \in B(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ bezeichne $B + x = \{y + x : y \in B\}$ die Verschiebung der Borel-Menge B um den Vektor x. Ein Punktprozess $\{S_n\}$ in $\mathbb{R}^d$ bzw. das zugehörige Zählmass $\{N_B\}$ heißt stationär, wenn

$$(N_{B_1}, \ldots, N_{B_n}) \stackrel{D}{=} (N_{B_1+x}, \ldots, N_{B_n+x})$$

für beliebige $n \geq 1, B_1, \ldots, B_n \in B(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

Nichtparametrische Schätzer

- K-Funktion bei stationären Cox-Prozessen:

$$K(r) = \int_{\|x\| \leq r} g_0(x)dx \ , \ r \geq 0$$

- $\kappa K(r)$: die erwartete Punktanzahl innerhalb einer Kugel mit Radius r um einen typischen Punkt (ohne den typischen Punkt mitzuzählen).

Simulation Cox-Prozess auf Fenster W

- Generiere eine Realisierung $\eta(\cdot \bigcap W)$ des zufälligen Maßes M in W.
- Generiere eine Realisierung eines Poisson-Prozesses mit dem Intensitätsmaß $\eta(\cdot \bigcap W)$.

Neyman-Scott-Prozess (Definition)

- $C := \{c_1, c_2, \dots\}$ Cluster-Zentren,
  homogener Poisson Prozess,
  Intensitätsmaß $\mu(B) = \kappa \cdot \nu_d(B)$, $\kappa > 0$
- also $N_C(B) \sim Poi(\kappa \cdot \nu_d(B))$
- zu jedem Zentrum c_i Poisson Prozess X_i,
  Intensitätsmaß $\mu_i(B) = \int\limits_B \alpha f(x - c_i) dx$, $\alpha > 0$,
  f Dichte einer abs. stetigen Zufallsvariablen in $\mathbb{R}^d$
- $X := \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} X_i$ ist ein Neyman-Scott-Prozess

Neyman-Scott-Prozess als Cox-Prozess

Aus dem Kolmorogrowschen Eindeutigkeitssatz folgt dass für den eben definierten Neyman-Scott-Prozess gilt:

- Es handelt sich um einen Cox-Prozess mit Intensitätsfeld $\{Z(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$
- $Z(x) = \sum_{c\in C} \alpha f(x-c)$
- $Z(x)$ stationär da C stationär,
  isotrop falls $f(x)$ nur von $\|x\|$ abhängt

Intensitäts- und Paar-Korrelations-Funktion

- $\rho(x) = E(Z(x)) = \alpha\kappa$
- $g(x_1, x_2) = \frac{E(Z(x_1)Z(x_2))}{\rho(x_1)\rho(x_2)} =: g_0(x_1 - x_2)$
  g translationsinvariant da $Z(x)$ stationär
- $g_0(x) = 1 + \frac{1}{\kappa}h(x)$
  wobei $h(x) := \int f(y)f(x+y)dy$

Beispiel: Thomas-Prozess

- f Dichte der d-dim. Normalverteilung $N(0, \sigma^2 I_d)$,
  also $f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{d}{2}}} exp(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2})$
- $\Rightarrow$ Prozess isotrop
- $h(x) = f_{X-Y}(x)$ wobei $X, Y \sim N(0, \sigma^2 I_d)$,
  also $X - Y \sim N(0, 2\sigma^2 I_d)$
  $\Rightarrow h(x) = \frac{1}{(4\pi\sigma^2)^{\frac{d}{2}}} exp(-\frac{\|x\|^2}{4\sigma^2})$
- $K(r) = \pi r^2 + \left(1 - exp(-\frac{r^2}{4\sigma^2})\right) \frac{1}{\kappa}$

Beispiel: Thomas-Prozess

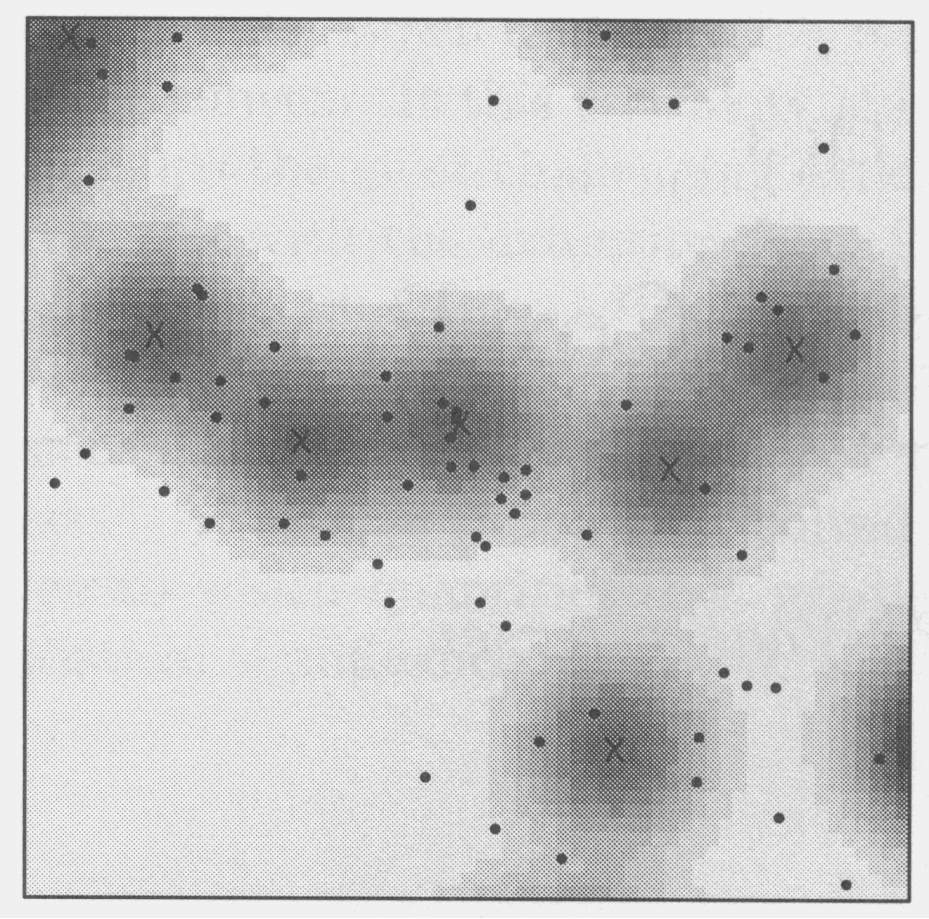

Abbildung: Realisierung mit $\kappa = 10$, $\alpha = 10$, $\sigma^2 = 0,1$

Quelle: [MW02] S.38

Beispiel: Matérn-Cluster-Prozess

- f Dichte der Gleichverteilung auf $B(0,r)$, $r > 0$
- also $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\nu_d(B(0,r))} & \text{falls } x \in B(0,r), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiel: Matérn-Cluster-Prozess

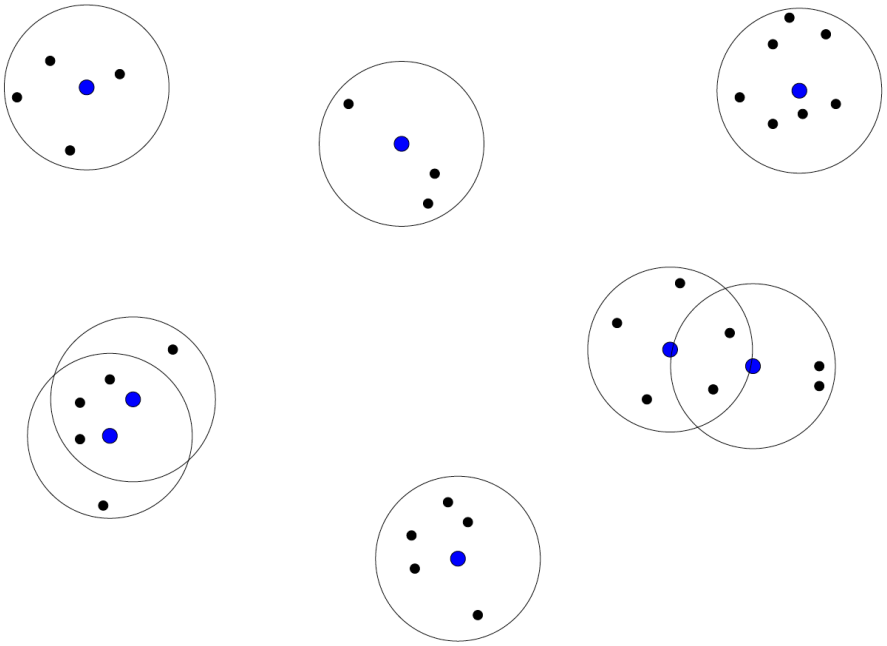

Abbildung: Realisierung eines Matérn-Cluster-Prozesses

Quelle: [Sch08] S.43

Simulation auf Fenster W

- Problem: Randeffekte
- Lösung: Betrachte $B_{ext} \supset W$
  Wobei $B_{ext} := W \oplus B(0, r),\ r > 0$
- Vorgehen:
  - Simuliere C auf B_{ext} Ergebnis: $\{c_1, \ldots, c_n\}$
  - entweder: $Z(x)$ auf B_{ext} berechnen,
    X als Poisson-Prozess simulieren
  - oder: $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ Poisson-Prozess X_i zu c_i simulieren

Log-Gauß-Cox-Prozess

- Sei $Y(x)$ ein Gauß-Zufallsfeld
- Intensitätsfeld $Z(x) := exp(Y(x))$
  bzw. $log(Z(x)) = Y(x)$
- also $M_B = \int\limits_B e^{Y(x)} dx$

Exkurs: Gauß-Zufallsfeld

- $X \sim N(\mu, C)$ wobei $\mu \in \mathbb{R}^d$, $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$
  $\Rightarrow$ Verteilung von X eindeutig festgelegt durch μ und C
- $X \sim N(\mu, C) \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}^d$ gilt $a^T X$ ist normalverteilt

Definition (Gauß-Zufallsfeld)

Ein Zufallsfeld $Y(x)$ auf der Parametermenge $\mathbb{R}^d$ heißt Gauß-Zufallsfeld, falls $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ gilt $(Y(x_1), \ldots, Y(x_n))^T$ ist normalverteilt.

Exkurs: Gauß-Prozess

- Verteilung eindeutig festgelegt durch $m(x) := E(Y(x))$ und $c(x_1, x_2) := cov(Y(x_1), Y(x_2))$
- m heißt Erwartungswertfunktion, c heißt Kovarianzfunktion
- umgekehrt gilt: $\forall m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und $\forall c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nichtnegativ definit existiert ein Gauß-Zufallsfeld $Y(x)$ auf $\mathbb{R}^d$ mit Erwartungswertfunktion m und Kovarianzfunktion c

Intensitätsfunktion eines LGCP

- $\rho(x) = E(Z(x)) = E(e^{Y(x)}) = m_{Y(x)}(1)$
  $= exp\left[E(Y(x)) + \frac{1}{2}Var(Y(x))\right]$
- Wobei $m_{Y(x)}(t) = E(e^{Y(x)t})$
  $= exp\left[E(Y(x))t + \frac{1}{2}Var(Y(x))t^2\right]$ die momenterzeugende Funktion der Normalverteilung ist.
- Also gilt:

Intensitätsfunktion

$$\rho(x) = exp\left[m(x) + \frac{1}{2}c(x,x)\right]$$

Paar-Korrelations-Funktion eines LGCP

- $E(Z(x_1)Z(x_2)) = E(e^{Y(x_1)+Y(x_2)}) = m_{Y(x_1)+Y(x_2)}(1)$
- mit $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2cov(X,Y)$ folgt:

Paar-Korrelations-Funktion

$$g(x_1, x_2) = \frac{E(Z(x_1)Z(x_2))}{\rho(x_1)\rho(x_2)} = exp\left[c(x_1, x_2)\right]$$

- Also Verteilung eines LGCP durch (ρ, g) festgelegt

Simulation eines LGCP auf W

- keine Probleme mit Randeffekten (Verteilung von LGCP hängt nur von Verteilung von $Y|_W := \{Y(x)\}_{x \in W}$ ab.)
- Problem: $Y|_W$ i.A. nicht diskret (keine endliche Darstellung im Rechner)
- Lösung: Näherung an $Y|_W$ durch Treppenfunktion
  - $W = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ disjunkte endliche Zerlegung
  - Lege $c_i \in C_i$ als Zentrum fest
  - $\widetilde{Y}(x) := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{C_i}(x) Y(c_i)$

LGCP

Für folgende Simulation gilt:

- $m(x) = 0$
- $c(x_1, x_2)$ gehört zur Exponentialfamilie,
  d.h. $c(x_1, x_2) = \sigma^2 exp(-\|\frac{1}{\alpha}(x_1 - x_2)\|^\delta)$
  wobei $0 \leq \delta \leq 2$, $\alpha > 0$ und σ^2 Varianz von $Y(x)$
- hier: $\delta = 1$, $\alpha = 0,14$ und $\sigma = 1$
- Plot von $Z(x) = exp(\widetilde{Y}(x))$ in Graustufen

LGCP

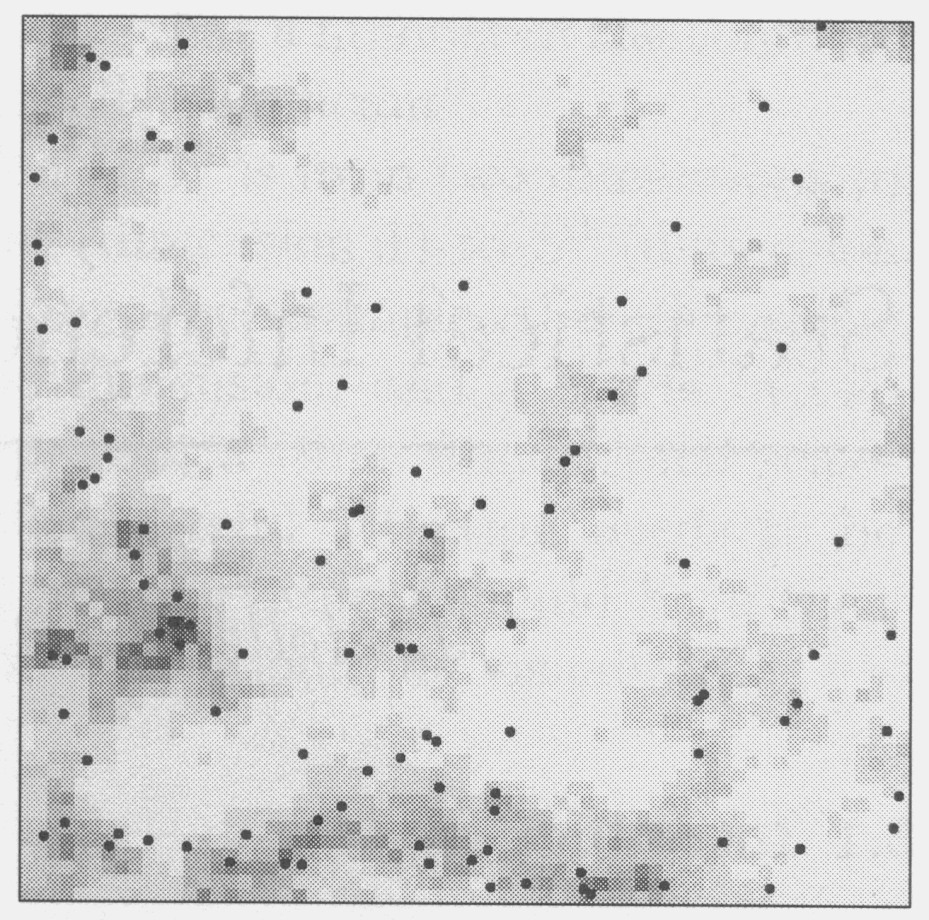

Abbildung: Realisierung eines Log-Gauß-Cox-Prozesses

Quelle: [MW02] S.38

Schätzer für Thomas Prozess X

- Erinnerung: $Z(x) = \sum_{c \in C} \alpha f(x - c)$, $E(Z(x)) = \alpha\kappa$, f Dichte von $N(0, \sigma^2 I_d)$
- $\kappa > 0$, $\alpha > 0$, $\sigma > 0$ unbekannt
- W ist ein beschränktes Beobachtungsfenster
- i.A. nur $X \cap W = \{x_1, \ldots, x_n\}$ beobachtbar, Cluster-Zentren c_i unbekannt ("missing data")
- Betrachte $B_{ext} \supset W$

Likelihood-Funktion für $\theta = (\kappa, \alpha, \sigma)$

- mit $Z(x, C \cap B_{ext}, \alpha, \sigma) := \frac{\alpha}{\sigma^2} \sum_{c \in C \cap B_{ext}} \varphi(\frac{x - c_i}{\sigma})$, wobei $\varphi(x)$ Dichte von $N(0, I_d)$, gilt:

Likelihood-Funktion

$$L(\theta) = E_\kappa \left[exp\left(- \int_W Z(x, C \cap B_{ext}, \alpha, \sigma) dx \right) \prod_{j=1}^{n} Z(x_j, C \cap B_{ext}, \alpha, \sigma) \right]$$

(Erwartungswert bezüglich Poisson-Prozess $C \cap B_{ext}$)

- MC-Approximation von $L(\theta)$ sehr aufwändig

Minimum-Kontrast-Schätzer für Thomas-Prozess

Idee:

- Kennen geschlossene Form von $g_0(x)$ und $K(r)$ $(d = 2)$
  - $g_0(x) = 1 + \frac{1}{(4\pi\sigma^2)^{\frac{d}{2}}} exp(-\frac{\|x\|^2}{4\sigma^2})\frac{1}{\kappa}$
  - $K(r) = \pi r^2 + \left(1 - exp(-\frac{r^2}{4\sigma^2})\right)\frac{1}{\kappa}$
- Vergleichen diese mit nichtparametrischem Schätzer $\hat{K}(r)$ bzw. $\hat{g}(r)$ also z.B.

Minimum-Kontrast-Schätzer

$$(\hat{\kappa}, \hat{\sigma}) := \arg\min_{\kappa,\sigma} \int_{a_1}^{a_2} \left[\hat{K}(r) - \pi r^2 - \left(1 - exp(-\frac{r^2}{4\sigma^2})\right)\frac{1}{\kappa}\right]^2 dr$$

$(0 \leq a_1 < a_2$ muss noch gewählt werden)

Minimum-Kontrast-Schätzer für Thomas-Prozess

- Wissen: $\rho(x) = \alpha\kappa$
- Schätzer für ρ z.B. $\hat{\rho} := \frac{n}{|W|}$ (wobei $|W| =$ Fläche von W)
- $\hat{\alpha} := \frac{\hat{\rho}}{\hat{\kappa}}$ Schätzer für α

Literatur

R. Adler and J. Taylor.
Random fields and geometry.
Springer, Berlin, 2007.

J. Møller, A. R. Syversveen, and R. P. Waagepetersen.
Log Gaussian Cox Processes.
Scandinavian Journal of Statistics, 25(3):451–482, September 1998.

J. Møller and R.P. Waagepetersen.
Statistical Inference for Cox Processes.
In Andrew B. Lawson and David G.T. Denison, editors, *Spatial Cluster Modelling*, chapter 3. Chapman & Hall/CRC, 2002.

V. Schmidt.
Vorlesungsskript Wahrscheinlichkeitstheorie, 2006.

V. Schmidt.
Vorlesungsskript Räumliche Statistik, 2008.

D. Stoyan, W. S. Kendall, and J. Mecke.
Stochastic Geometry and its Applications.
J. Wiley & Sons, Chichester, 2nd edition, 1995.