



Iterierte Tessellationen: Theorie und Anwendungen

Oliver Eckert, Michael Hirsch | 3. Juni 2008 | Seminar Statistik

Inhalt

- ① Wiederholung zufällige Mosaik
- ② Iterierte Tessellationen - Theorie
 - Motivation / Modellbeschreibung
 - Beispiele und Eigenschaften
 - Intensitäten
 - Bernoulli Thinning
- ③ Iterierte Tessellationen - Anwendung
 - Ziel
 - Modellierung
 - Modellauswahl
 - Monte-Carlo Test
 - Anwendung auf konkretes Beispiel
 - abschließende Bemerkungen

Wiederholung

Definition (Tessellation)

Eine Tessellation τ im $\mathbb{R}^2$ ist eine Folge von 2-dimensionalen Polytopen $P_n \in \mathcal{P} = \{P : P \text{ ist konvexes Polytop}\}$ mit

$$\text{int}P_n \cap \text{int}P_m = \emptyset \quad \forall n \neq m$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n = \mathbb{R}^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(P_n \cap C \neq \emptyset) < \infty \quad \forall C, C \text{ kompakte Menge}$$

Die 2-dimensionalen Polytope $P \in \tau$ heißen die Zellen von τ .

Wiederholung

Definition (k-Facetten eines Polytops)

Wir definieren die Facetten eines Polytops P im $\mathbb{R}^2$:

Die 0-Facetten sind die Ecken,
die 1-Facetten sind die Kanten und
die 2-Facette ist die Fläche des Polytops P .

Wiederholung

Definition (zufällige Tessellation)

Sei $\mathcal{T}$ die Menge aller Tessellationen.

Eine zufällige Tessellation $\{\Xi_n\}_{n \geq 1}$ ist eine Menge von zufälligen Polytopen, die mit Wkt 1 in $\mathcal{T}$ liegt.

Wiederholung

Definition (Facetten-Prozess)

Sei X zufällige Tessellation.

Dann ist $X^{(k)}$ der k -Facetten-Prozess von X .

D.h:

$$X^{(0)} = \{e_n\}_{n \geq 1} \quad e_n \text{ ist Ecke einer Zelle von } X$$

$$X^{(1)} = \{k_n\}_{n \geq 1} \quad k_n \text{ ist Kante einer Zelle von } X$$

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= \{\Xi_n\}_{n \geq 1} \quad \Xi_n \text{ ist Zelle von } X \\ &= X \end{aligned}$$

Wiederholung

Definition (assoziierter Punkt)

Betrachte $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

- $\alpha(P) \in P$
- $\alpha(P + a) = \alpha(P) + a \quad \forall P \in \mathcal{P}, a \in \mathbb{R}^2$

Sei $\{\Xi_n\}$ eine zufällige Tessellation.

Dann heißt $\alpha(\Xi_n)$ der zu Ξ_n assoziierte Punkt.

Wiederholung

Lemma (Lemma 1.2)

Eine zufällige Tessellation $\{\Xi_n\}_n$ kann durch einen markierten Punktprozess X beschrieben werden:

$$X = \{\alpha(\Xi_n), \Xi_{n,0}\}$$

Dabei:

$$\Xi_{n,0} = \Xi_n - \alpha(\Xi_n)$$

Wiederholung

Lemma (Lemma 1.3)

Jeder k -Facetten-Prozess einer Tessellation $\{\Xi_n\}_n$ kann durch einen (markierten) Punktprozess $X^{(k)}$ beschrieben werden

Beispiel

- Der 0-Facetten-Prozess ist selbst ein Punktprozess
- 1-Facetten-Prozess als Punktprozess der Kantenmittelpunkte, markiert mit den Kanten.

Wiederholung

Definition

- λ_1 ist die Intensität des Punkt-Prozesses der Ecken.
- λ_2 ist die Intensität des Punkt-Prozesses der Kantenmittelpunkte.
- λ_3 ist die Intensität des Punkt-Prozesses der Zellenschwerpunkte.
- $\lambda_4 = \lambda_2 \cdot \text{Länge der typischen Kante}$.

Wiederholung

Interpretation

Für stationäre Tessellationen können wir den Vektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)^T$ wie folgt interpretieren:

$\lambda_1 =$ *erwartete Anzahl der Ecken*

$\lambda_2 =$ *erwartete Anzahl der Kanten*

$\lambda_3 =$ *erwartete Anzahl der Zellen*

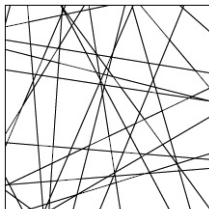
$\lambda_4 =$ *erwartete Gesamtkantenlänge*

jeweils pro Einheitsfläche.

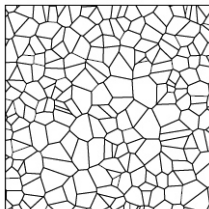
Wiederholung

Basis-Tessellationen

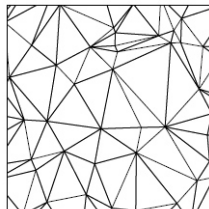
- a) Poisson-Line-Tessellation
- b) Poisson-Voronoi-Tessellation
- c) Poisson-Delaunay-Tessellation



(a) $PLT, \gamma_{PLT} = 0.1$



(b) $PVT, \gamma_{PVT} = 0.005$



(c) $PDT, \gamma_{PDT} = 0.001$

Wiederholung

a) Poisson-Line-Tessellation

- Poisson-Punkt-Prozess auf $\mathbb{R} \times [0, \pi)$
- 1. Komponente: Abstand zum Ursprung
- 2. Komponente: Schnittwinkel mit reeller Achse

Wiederholung

b) Poisson-Voronoi-Tessellation

- Poisson-Punkt-Prozess auf $\mathbb{R}^2$
- $\Xi_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x_n| \leq |x - x_m| \forall m \neq n\}$
- x_i Zellkerne

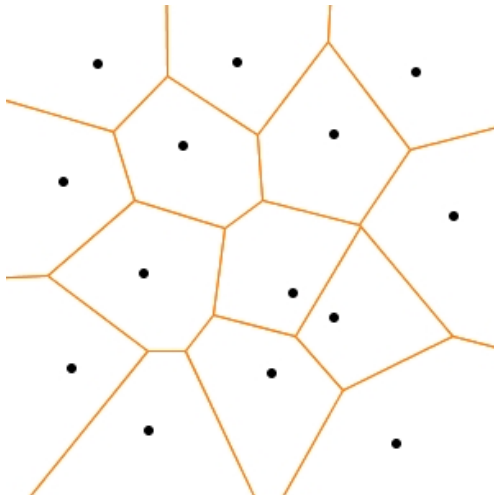
Wiederholung

c) Poisson-Delaunay-Tessellation

- Poisson-Punkt-Prozess auf $\mathbb{R}^2$
- geht aus PVT hervor

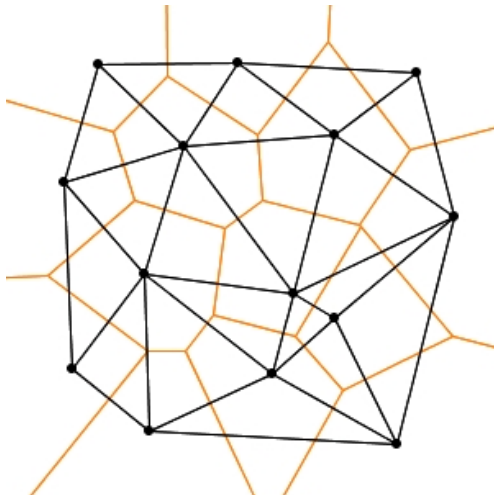
Wiederholung

c) Poisson-Delaunay-Tessellation



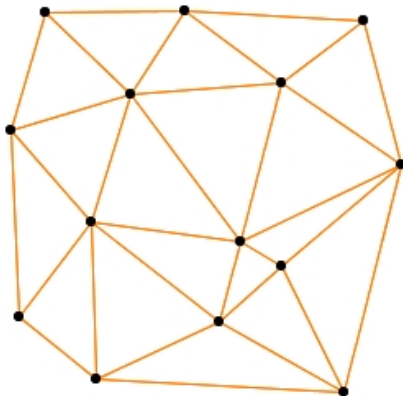
Wiederholung

c) Poisson-Delaunay-Tessellation



Wiederholung

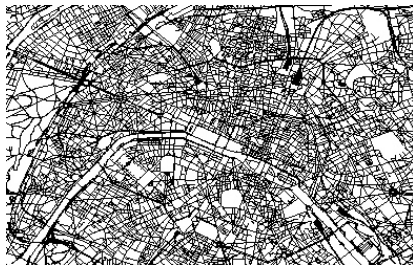
c) Poisson-Delaunay-Tessellation



Motivation

Problemstellung

- Reale Probleme oft komplex
- Basis-Tessellation reichen nicht für Modellierung



Modellbeschreibung

Definition (iterierte Tessellation)

Seien $X_0 = \{\Xi_n\}_{n \geq 1}$, $X_n = \{\Xi_{n,\nu}\}_{\nu \geq 1}$ zufällige Tessellationen.
Sei

$$X = \{\Xi_n \cap \Xi_{n,\nu} : \text{int}\Xi_n \cap \text{int}\Xi_{n,\nu} \neq \emptyset\}_{\substack{\nu \geq 1 \\ n \geq 1}}$$

Dann heißt X iterierte Tessellation mit Initial-Tessellation X_0 und Komponenten-Tessellationen X_n .

Beispiele und Eigenschaften

Definition (Nesting)

Seien $X_0 = \{\Xi_n\}_{n \geq 1}$, $X_n = \{\Xi_{n,\nu}\}_{\nu \geq 1}$ zufällige Tessellationen, mit X_n unabhängig und identisch verteilt $\forall n$ und unabhängig von X_0 .

$$X = \{\Xi_n \cap \Xi_{n,\nu} : \text{int}\Xi_n \cap \text{int}\Xi_{n,\nu} \neq \emptyset\}_{\substack{\nu \geq 1 \\ n \geq 1}}$$

heißt X_0/X_1 -Nesting

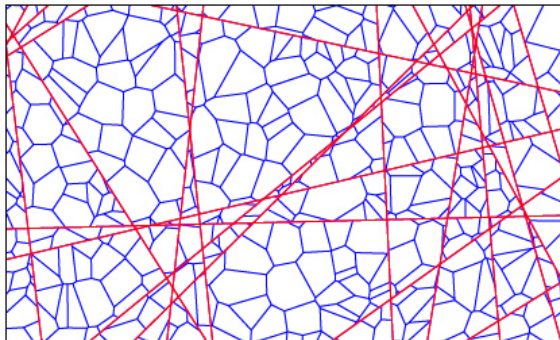
Beispiele und Eigenschaften

Nesting anschaulich

- Jede Zelle von X_0 wird weiter unterteilt.
- Unterteilung der Zellen mit X_1 .
- Komponenten-Tessellationen sind unabhängige, identisch verteilte Kopien.
- Diese sind unabhängig von X_0

Beispiele und Eigenschaften

PLT/PVT - Nesting



Beispiele und Eigenschaften

Definition (Superposition)

Eine iterierte Tessellation X heißt X_0/X_1 -Superposition, falls

$$X_0 = \{\Xi_n\}_{n \geq 1}$$

$$X_1 = \{\Xi'_\nu\}_{\nu \geq 1}$$

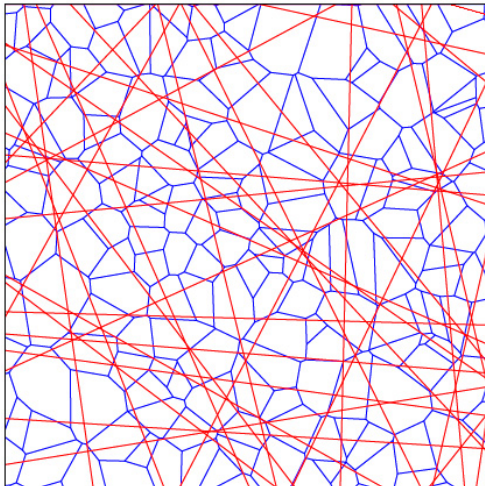
$$X = \left\{ \Xi_n \cap \Xi'_\nu : \text{int} \Xi_n \cap \text{int} \Xi'_\nu \neq \emptyset \right\}_{\substack{\nu \geq 1 \\ n \geq 1}}$$

Superposition anschaulich

- Wir bilden die Initial-Tessellation X_0
- Die Kanten von X_1 werden über die von X_0 gelegt

Beispiele und Eigenschaften

PLT/PVT - Superposition



Beispiele und Eigenschaften

Definition (exchangeable)

Die Tessellationen X_n heißen austauschbar (exchangeable), falls die Folge $\{X_n\}$ invariant unter endlichen Vertauschungen ist, d.h.

$$(X_1, \dots, X_n) \stackrel{D}{=} (X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})$$

für alle Permutationen π

Beispiele und Eigenschaften

Lemma (Lemma 2.1)

Sei X eine stationäre, isotrope, zufällige iterierte Tessellation mit initialisierender Tessellation X_0 und Komponenten-Tessellationen $X_n, n \geq 1$. Ferner sei $\{X_n\}$ austauschbar und unabhängig von X_0 .

- *X ist stationär, falls X_0 und X_n stationär sind.*
- *X ist isotrop, falls X_0 und X_n isotrop sind.*

Intensitäten

Intensitäten von X

- $\lambda_1^{(0)}$ = Intensität des Punkt-Prozesses der Ecken von X_0 .
- $\lambda_2^{(0)}$ = Intensität des Punkt-Prozesses der Kantenmittelpunkte von X_0 .
- $\lambda_3^{(0)}$ = Intensität des Punkt-Prozesses der Zellenschwerpunkte von X_0 .
- $\lambda_4^{(0)} = \lambda_2^{(0)}$. Länge der typischen Kante von X_0 .
- Analog $\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_4^{(1)}$ für X_1

Intensitäten

Wir geben ein Ergebnis der Stereologie:

Lemma (Lemma 2.2)

Der Schnitt der Kantenmenge zweier stationärer und isotroper zufälligen Tessellationen X_0, X_1 im $\mathbb{R}^2$ ist ein stationärer und isotroper Punktprozess mit Intensität

$$\frac{2}{\pi} \cdot \lambda_4^{(0)} \cdot \lambda_4^{(1)}$$

Intensitäten

Theorem (Theorem 2.2)

Sei $X = X_0/X_1$ -Superposition.

Dann gilt:

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(0)} + \lambda_1^{(1)} + \frac{2}{\pi} \lambda_4^{(0)} \lambda_4^{(1)}$$

$$\lambda_2 = \lambda_2^{(0)} + \lambda_2^{(1)} + \frac{4}{\pi} \lambda_4^{(0)} \lambda_4^{(1)}$$

$$\lambda_3 = \lambda_3^{(0)} + \lambda_3^{(1)} + \frac{2}{\pi} \lambda_4^{(0)} \lambda_4^{(1)}$$

$$\lambda_4 = \lambda_4^{(0)} + \lambda_4^{(1)}$$

Intensitäten

anschaulich an Superposition

- Anzahl der Schnitte von Kanten von X_0 und X_1 : $\frac{2}{\pi} \lambda_4^{(0)} \lambda_4^{(1)}$
- Pro Schnitt entsteht eine zusätzliche Ecke von X
- Pro Schnitt werden aus den beiden Kanten vier
- Pro Schnitt entsteht eine neue Zelle

Intensitäten

Theorem (Theorem 2.3)

Sei $X = X_0/X_1$ -Nesting.

Dann gilt:

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(0)} + \lambda_1^{(1)} + \frac{4}{\pi} \lambda_4^{(0)} \lambda_4^{(1)}$$

$$\lambda_2 = \lambda_2^{(0)} + \lambda_2^{(1)} + \frac{6}{\pi} \lambda_4^{(0)} \lambda_4^{(1)}$$

$$\lambda_3 = \lambda_3^{(0)} + \lambda_3^{(1)} + \frac{2}{\pi} \lambda_4^{(0)} \lambda_4^{(1)}$$

$$\lambda_4 = \lambda_4^{(0)} + \lambda_4^{(1)}$$

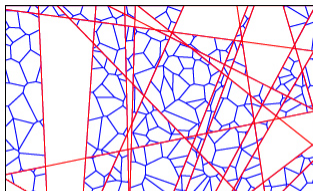
Bernoulli Thinning

Bernoulli-Thinning anschaulich

- Nicht jede Zelle von X_0 wird weiter unterteilt
- Nur mit Wahrscheinlichkeit p wird weiter iteriert
- Anwendung: reale Daten oft nicht homogen

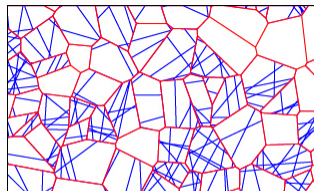
Bernoulli Thinning

Bernoulli Thinning Bsp



(a) PLT/PVT,

$\gamma_0 = 0.02, \gamma_1 = 0.0004, p = 0.75$



(b) PVT/PLT,

$\gamma_0 = 0.0001, \gamma_1 = 0.04, p = 0.75$

Bernoulli Thinning

Theorem (Theorem 2.4)

$X = X_0/pX_1$ -Nesting mit *Bernoulli-Thinning*.

Dann gilt:

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(0)} + p\lambda_1^{(1)} + \frac{4p}{\pi}\lambda_4^{(0)}\lambda_4^{(1)}$$

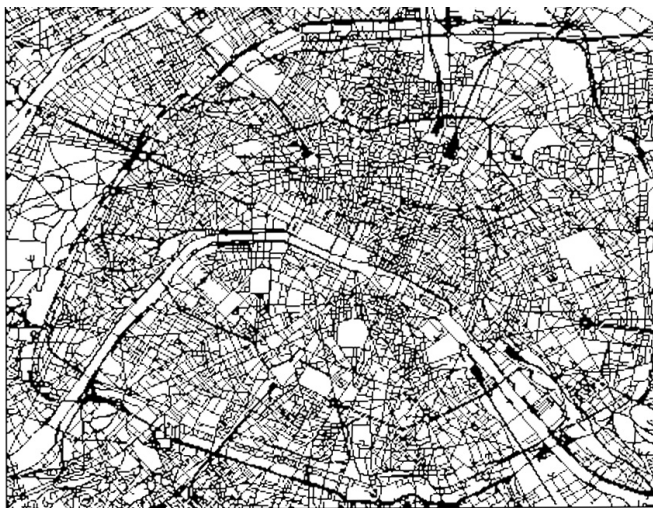
$$\lambda_2 = \lambda_2^{(0)} + p\lambda_2^{(1)} + \frac{6p}{\pi}\lambda_4^{(0)}\lambda_4^{(1)}$$

$$\lambda_3 = \lambda_3^{(0)} + p\lambda_3^{(1)} + \frac{2p}{\pi}\lambda_4^{(0)}\lambda_4^{(1)}$$

$$\lambda_4 = \lambda_4^{(0)} + p\lambda_4^{(1)}$$

Anwendung am Beispiel einer Infrastruktur-Modellierung

Das Straßennetz von Paris



Modellierung

Ziel

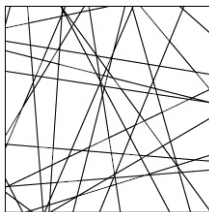
Ziel ist es, die Straßen von Paris mit Hilfe von iterierten Tessellationen zu modellieren

Modellierung

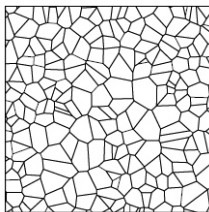
Handwerkszeug # 1

Wir beschränken uns auf die drei Basis-Tessellationen:

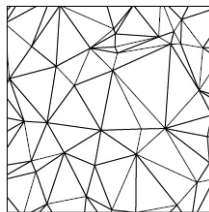
- a) Poisson-Line-Tessellation
- b) Poisson-Voronoi-Tessellation
- c) Poisson-Delaunay-Tessellation



(a) PLT , $\gamma_{PLT} = 0.1$



(b) PVT , $\gamma_{PVT} = 0.005$



(c) PDT , $\gamma_{PDT} = 0.001$

Modellierung

Handwerkszeug # 2

Zur Auswahl des besten Modells benötigen wir später noch ein Abstands-Maß, den relativen Euklidischen Abstand:

$$d'_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - y_i}{x_i} \right)^2}$$

Beachte: Dieses Maß ist nicht symmetrisch, d.h.

$$d'_e(x, y) \neq d'_e(y, x)$$

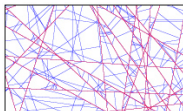
Modellierung

Modellbeschreibung

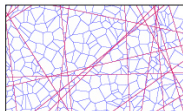
- Input: geeignetes Daten-Fenster
- Haupt- und Nebenstraßen unterscheidbar
- betrachten nur X_0/X_1 - Nestings ausgehend von unseren 3 Basistypen

Modellierung

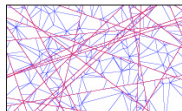
→ mögliche Tessellationen



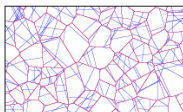
(a) PLT/PLT,
 $\gamma_0 = 0.02, \gamma_1 = 0.04$



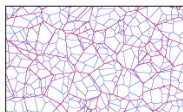
(b) PLT/PVT,
 $\gamma_0 = 0.02, \gamma_1 = 0.0004$



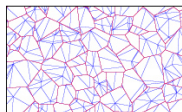
(c) PLT/PDT,
 $\gamma_0 = 0.02, \gamma_1 = 0.0001388$



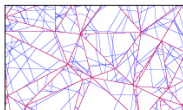
(d) PVT/PLT,
 $\gamma_0 = 0.0001, \gamma_1 = 0.04$



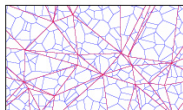
(e) PVT/PVT,
 $\gamma_0 = 0.0001, \gamma_1 = 0.0004$



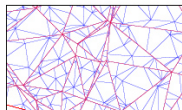
(f) PVT/PDT,
 $\gamma_0 = 0.0001, \gamma_1 = 0.0001388$



(g) PDT/PLT,
 $\gamma_0 = 0.0000347, \gamma_1 = 0.04$



(h) PDT/PVT,
 $\gamma_0 = 0.0000347, \gamma_1 = 0.0004$

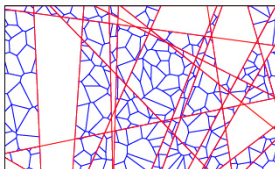


(i) PDT/PDT,
 $\gamma_0 = 0.0000347, \gamma_1 = 0.0001388$

Modellierung

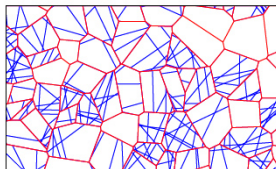
Modellbeschreibung

- Input: geeignetes Daten-Fenster
- Haupt- und Nebenstraßen unterscheidbar
- betrachten nur X_0/pX_1 - Nestings ausgehend von unseren 3 Basistypen
- **zusätzlich:** Bernoulli-Thinning um große leere Flächen besser simulieren zu können



(a) PLT/PVT,

$\gamma_0 = 0.02, \gamma_1 = 0.0004, p = 0.75$



(b) PVT/PLT,

$\gamma_0 = 0.0001, \gamma_1 = 0.04, p = 0.75$

Auswahl der optimalen Tessellation $\mathcal{T}^*$

Schritt 1: Vektor λ geeignet schätzen

Zur Erinnerung:

Tessellationen können durch den Vektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)^T$ beschrieben werden, wobei

$\lambda_1 =$ erwartete *Anzahl der Ecken*

$\lambda_2 =$ erwartete *Anzahl der Kanten*

$\lambda_3 =$ erwartete *Anzahl der Zellen*

$\lambda_4 =$ erwartete *Gesamtkantenlänge*

jeweils pro Einheitsfläche.

Auswahl der optimalen Tessellation τ^*

Schritt 1: Vektor λ geeignet schätzen

- Vektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)^T$ aus Daten schätzen
- unverzerrter Schätzer

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{|W|} (n_v, n_e, n_c, l_e)^T$$

n_v = Anzahl der Ecken (vertices) in W

n_e = Anzahl der Kanten (edges) in W

n_c = Anzahl der Zellen (cells) in W

l_e = Gesamtkantenlänge

$|W|$ = Fläche von Bildausschnitt W

Auswahl der optimalen Tessellation τ^*

Schritt 2: minimiere $\lambda \mapsto d'_e(\hat{\lambda}, \lambda)$

nicht-iterierter Fall:

- PLT, PVT, PDT
- Umrechnung von Intensitätsparamter γ zu $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)^T$:

Table 1: *Values of $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ for a given tessellation with intensity γ*

Tessellation	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
PLT	$\frac{1}{\pi}\gamma^2$	$\frac{2}{\pi}\gamma^2$	$\frac{1}{\pi}\gamma^2$	γ
PVT	2γ	3γ	γ	$2\sqrt{\gamma}$
PDT	γ	3γ	2γ	$\frac{32}{3\pi}\sqrt{\gamma}$

Auswahl der optimalen Tessellation τ^*

Schritt 2: minimiere $\lambda \mapsto d'_e(\hat{\lambda}, \lambda)$

Modellauswahl-Algorithmus (nicht-iterierter Fall):

- Gehe für γ schrittweise (Schrittweite z.B. 0.00001) durch ein Intervall $[a, b]$
- berechne $\forall \gamma \in [a, b]$ den zugeh. Vektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)^T$
- bestimme $\lambda_{min} = \arg \min_{\lambda} d'_e(\hat{\lambda}, \lambda)$

Auswahl der optimalen Tessellation τ^*

Schritt 3: Bestimmung von τ^*

- Führe die 3 Punkte von Schritt 2 für alle drei möglichen Tessellationen aus.
- Bestimme

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda} \left\{ d'_e \left(\hat{\lambda}, \lambda_{min}^{PLT} \right), d'_e \left(\hat{\lambda}, \lambda_{min}^{PVT} \right), d'_e \left(\hat{\lambda}, \lambda_{min}^{PDT} \right) \right\}$$

$\Rightarrow \tau^*$ ist dann die zu γ^* gehörige Tessellation,
wobei γ^* durch λ^* gegeben ist.

Auswahl der optimalen Tessellation τ^*

Schritt 2: minimiere $\lambda \mapsto d'_e(\hat{\lambda}, \lambda)$

Fall X_0/pX_1 - Nesting, $p = 1$:

- PLT/PLT, PLT/PVT, PLT/PDT, ..., PDT/PVT, PDT/PDT
- Umrechnung von Intensitätspaar (γ_0, γ_1) in Vektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)^T$

Auswahl der optimalen Tessellation τ^* Umrechnungstabelle $\gamma \leftrightarrow \lambda$ für X_0/pX_1 - Tessellationen

	PLT/PLT	PLT/PVT	PLT/PDT
λ_1	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + \frac{1}{\pi} p \gamma_1^2 + \frac{4}{\pi} p \gamma_0 \gamma_1$	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + 2p \gamma_1 + \frac{8}{3\pi} p \gamma_0 \sqrt{\gamma_1}$	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + p \gamma_1 + \frac{128}{3\pi^2} p \gamma_0 \sqrt{\gamma_1}$
λ_2	$\frac{2}{\pi} \gamma_0^2 + \frac{2}{\pi} p \gamma_1^2 + \frac{6}{\pi} p \gamma_0 \gamma_1$	$\frac{2}{\pi} \gamma_0^2 + 3p \gamma_1 + \frac{12}{\pi} p \gamma_0 \sqrt{\gamma_1}$	$\frac{2}{\pi} \gamma_0^2 + 3p \gamma_1 + \frac{64}{\pi^2} p \gamma_0 \sqrt{\gamma_1}$
λ_3	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + \frac{1}{\pi} p \gamma_1^2 + \frac{2}{\pi} p \gamma_0 \gamma_1$	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + p \gamma_1 + \frac{4}{\pi} p \gamma_0 \sqrt{\gamma_1}$	$\frac{1}{\pi} \gamma_0^2 + 2p \gamma_1 + \frac{64}{3\pi^2} p \gamma_0 \sqrt{\gamma_1}$
λ_4	$\gamma_0 + p \gamma_1$	$\gamma_0 + 2p \sqrt{\gamma_1}$	$\gamma_0 + \frac{32}{3\pi} p \sqrt{\gamma_1}$
	PVT/PLT	PVT/PVT	PVT/PDT
λ_1	$\frac{1}{\pi} p \gamma_1^2 + 2\gamma_0 + \frac{8}{\pi} p \gamma_1 \sqrt{\gamma_0}$	$2(\gamma_0 + p \gamma_1) + \frac{16}{\pi} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$	$2\gamma_0 + p \gamma_1 + \frac{256}{9\pi^2} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$
λ_2	$\frac{2}{\pi} p \gamma_1^2 + 3\gamma_0 + \frac{12}{\pi} p \gamma_1 \sqrt{\gamma_0}$	$3(\gamma_0 + p \gamma_1) + \frac{24}{\pi} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$	$3(\gamma_0 + p \gamma_1) + \frac{128}{\pi^2} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$
λ_3	$\frac{1}{\pi} p \gamma_1^2 + \gamma_0 + \frac{4}{\pi} p \gamma_1 \sqrt{\gamma_0}$	$\gamma_0 + p \gamma_1 + \frac{8}{\pi} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$	$\gamma_0 + 2p \gamma_1 + \frac{128}{3\pi^2} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$
λ_4	$p \gamma_1 + 2\sqrt{\gamma_0}$	$2(\sqrt{\gamma_0} + p \sqrt{\gamma_1})$	$2\sqrt{\gamma_0} + \frac{32}{3\pi} p \sqrt{\gamma_1}$
	PDT/PLT	PDT/PVT	PDT/PDT
λ_1	$\frac{1}{\pi} p \gamma_1^2 + \gamma_0 + \frac{128}{3\pi^2} p \gamma_1 \sqrt{\gamma_0}$	$2p \gamma_1 + \gamma_0 + \frac{256}{3\pi^2} p \sqrt{\gamma_1 \gamma_0}$	$\gamma_0 + p \gamma_1 + \frac{4096}{9\pi^2} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$
λ_2	$\frac{2}{\pi} p \gamma_1^2 + 3\gamma_0 + \frac{64}{\pi^2} p \gamma_1 \sqrt{\gamma_0}$	$3(p \gamma_1 + \gamma_0) + \frac{128}{\pi^2} p \sqrt{\gamma_1 \gamma_0}$	$3(\gamma_0 + p \gamma_1) + \frac{2048}{3\pi^2} p \sqrt{\gamma_0 \gamma_1}$
λ_3	$\frac{1}{\pi} p \gamma_1^2 + 2\gamma_0 + \frac{64}{3\pi^2} p \gamma_1 \sqrt{\gamma_0}$	$p \gamma_1 + 2\gamma_0 + \frac{128}{3\pi^2} p \sqrt{\gamma_1 \gamma_0}$	$2(\gamma_0 + p \gamma_1) + \frac{2048}{9\pi^2} p \sqrt{\gamma_1 \gamma_0}$
λ_4	$p \gamma_1 + \frac{32}{3\pi} \sqrt{\gamma_0}$	$2p \sqrt{\gamma_1} + \frac{32}{3\pi} \sqrt{\gamma_0}$	$\frac{32}{3\pi} (\sqrt{\gamma_0} + p \sqrt{\gamma_1})$

Auswahl der optimalen Tessellation τ^*

Schritt 2: minimiere $\lambda \mapsto d'_e(\hat{\lambda}, \lambda)$

Modellauswahl-Algorithmus (iterierter Fall):

- Gehe für jedes $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$ schrittweise durch ein Intervall $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$
- berechne für jedes γ den zugeh. Vektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)^T$
- bestimme $\lambda_{min} = \arg \min_{\lambda} d'_e(\hat{\lambda}, \lambda)$

Auswahl der optimalen Tessellation τ^*

Schritt 3: Bestimmung von τ^*

- Führe die 3 Punkte von Schritt 2 für alle 9 möglichen Tessellationen aus.
- Bestimme

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda} \left\{ d'_e \left(\hat{\lambda}, \lambda_{min}^{PLT/PLT} \right), \dots, d'_e \left(\hat{\lambda}, \lambda_{min}^{PDT/PDT} \right) \right\}$$

$\Rightarrow \tau^*$ ist dann die zu γ^* gehörige Tessellation,
wobei $\gamma^* = (\gamma_0^*, \gamma_1^*)$ durch λ^* gegeben ist.

Auswahl der optimalen Tessellation $\mathcal{T}^*$

Schritt 2 / 3 mit Bernoulli-Thinning

Fall X_0/pX_1 - Nesting, $p < 1$:

- PLT/pPLT, PLT/pPVT, ..., PDT/pPVT, PDT/pPDT
- können durch Tripel (γ_0, γ_1, p) beschrieben werden
- Umrechnung in Vektor λ siehe vorige Tabelle
- Minimierung analog, nur 3-dim.

Monte-Carlo Test zur Verifizierung / Validierung

2 Anwendungen

- Verifizierung des Algorithmus
- Validierung des optimalen Modells

Monte-Carlo Test zur Verifizierung / Validierung

Test-Aufbau zur Verifizierung des Algorithmus

- H_0 : Daten können durch Tessellations-Modell $\tau(H_0)$ beschrieben werden
- $\tau(H_0)$ hat Intensitätsparameter $(\gamma_0(H_0), \gamma_1(H_0))$
- Test zum Niveau $\alpha = 0.05 \Rightarrow n = 99$ Simulationen
- Test zum Niveau $\alpha = 0.01 \Rightarrow n = 999$ Simulationen

Monte-Carlo Test zur Verifizierung / Validierung

Test-Aufbau zur Validierung des optimalen Modells

- wähle $\tau(H_0) = \tau^*$
- wähle $\gamma_0(H_0) = \gamma_0^*$
- wähle $\gamma_1(H_0) = \gamma_1^*$
- H_1 : Daten können durch die anderen betrachteten Tessellations-Modelle beschrieben werden

Monte-Carlo Test zur Verifizierung / Validierung

Test-Ablauf

- berechne für jede Simulation $d'_e \left(\lambda_{\text{berechnet}}, \hat{\lambda}_{\text{simuliert}} \right)$
- erhalten $d_1, \dots, d_n$
- $d_{n+1} = d^* = d'_e \left(\lambda_{\text{berechnet}}, \hat{\lambda}_{\text{daten}} \right)$
- $d_1, \dots, d_n, d^*$ ordnen $\Rightarrow d_{(1)}, d_{(2)}, \dots, d_{(n)}, d_{(n+1)}$
- Ablehnungsbereiche: $R_{0.05} = [96, 100]$
 $R_{0.01} = [991, 1000]$
- H_0 wird verworfen, falls Index i^* von d^* in R_α liegt

Monte-Carlo Test zur Verifizierung / Validierung

Alternative Ablehnung der Nullhypothese

- $p\text{-value} := 1 - \frac{i^* - 1}{n + 1}$
- beachte: $p\text{-value} \in \left[\frac{1}{n+1}, 1 \right]$
- H_0 wird verworfen, falls $p\text{-value} < \alpha$

Monte-Carlo Test zur Verifizierung / Validierung

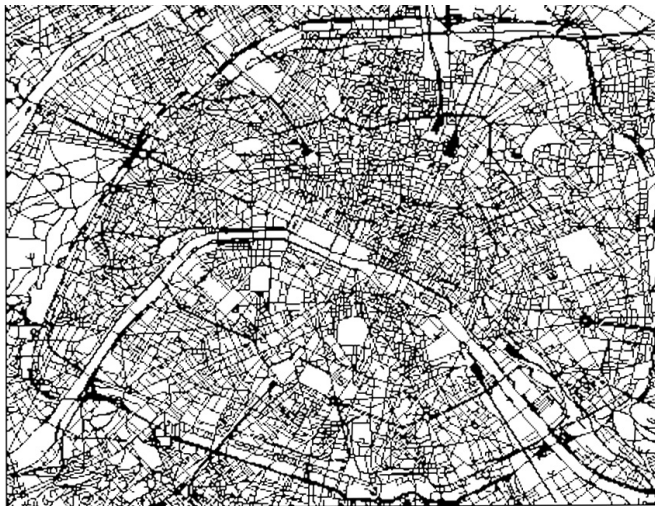
Beispiel-Test zur Verifizierung des Algorithmus

- Daten stammen von einer PLT
- $\tau(H_0)$ ist PLT mit Intensität $\gamma = 0.10070$
- Ergebnis:

α	n	R_α	d^*	$d_{(1)}$	$d_{(n+1)}$	i^*	p-value	reject
0.05	99	[96, 100]	0.00223	0.00011	0.04312	8	0.93	no
0.01	999	[991, 1000]	0.00223	0.00015	0.07141	108	0.893	no

Anwendung auf das Straßennetz von Paris

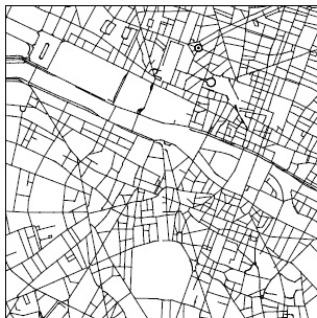
Extrahierte Infrastruktur-Karte von Paris



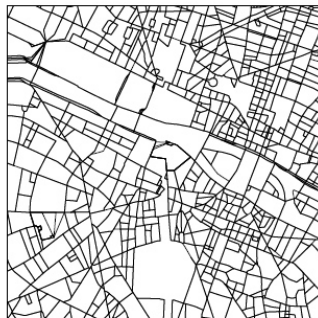
Anwendung auf das Straßennetz von Paris

Datenaufbereitung (Preprocessing)

Sackgassen und andere kleine Unstimmigkeiten werden noch beseitigt



(a) *Raw data*



(b) *Preprocessed data*

Anwendung auf das Straßennetz von Paris

Modellbeschreibung

Betrachten X_0/pX_1 - Nestings ohne Bernoulli-Thinning, d.h. $p = 1$.

$\Rightarrow$ Entscheidung von vorneherein leider nicht eindeutig!

$p < 1 \Rightarrow$ Entscheidung eindeutig, aber deutlich höherer Rechenaufwand!

Anwendung auf das Straßennetz von Paris

Modellauswahl für Hauptstraßen

Wegen der Unterscheidbarkeit modellieren wir im 1.Schritt nur die Hauptstraßen.

Parametersettings:

- Intervall für γ_0 : $[0, 0.005]$
- Schrittweite: 0.000001
- Abstandsmaß: d'_e

Anwendung auf das Straßennetz von Paris

Modellauswahl für Hauptstraßen

⇒ Ergebnis:

X	$d'_{e,min}$	γ^*
PLT	0.21101	0.002384
PVT	0.29749	0.000001
PDT	0.73378	0.000001

Anwendung auf das Straßennetz von Paris

Modellauswahl für Hauptstraßen

⇒ Ergebnis:

X	$d'_{e,min}$	γ^*
PLT	0.21101	0.002384
PVT	0.29749	0.000001
PDT	0.73378	0.000001



Anwendung auf das Straßennetz von Paris

Modellauswahl für Haupt- und Nebenstraßen

- Fixieren X_0 als PLT mit $\gamma_0 = 0.002384$
- suchen nun optimales X_0/X_1 -Nesting
- in Frage kommen PLT/PLT, PLT/PVT, PLT/PDT

Parametersettings:

- Intervall für γ_1 : $[0, 0.02]$
- Schrittweite: 0.000001
- Abstandsmaß: d'_e

Anwendung auf das Straßennetz von Paris

Modellauswahl für Haupt- und Nebenstraßen

⇒ Ergebnis:

X	$d'_{e,min}$	γ_0	γ_1
PLT/PLT	0.15224	0.002384	0.013906
PLT/PVT	0.20455	0.002384	0.000044
PLT/PDT	0.36649	0.002384	0.000028

Anwendung auf das Straßennetz von Paris

Modellauswahl für Haupt- und Nebenstraßen

⇒ Ergebnis:

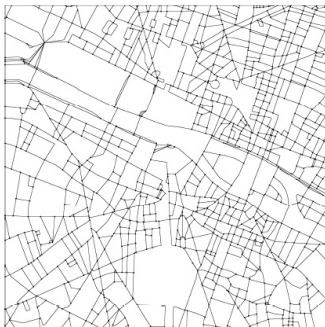
X	$d'_{e,min}$	γ_0	γ_1
PLT/PLT	0.15224	0.002384	0.013906
PLT/PVT	0.20455	0.002384	0.000044
PLT/PDT	0.36649	0.002384	0.000028



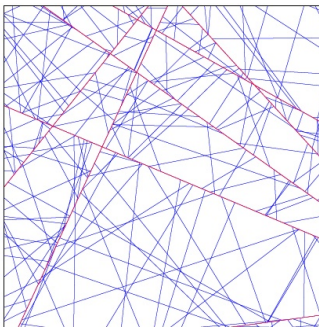
Anwendung auf das Straßennetz von Paris

Ergebnis

PLT/PLT - Realisierung mit $\gamma_0 = 0.002384$, $\gamma_1 = 0.013906$:



Preprocessed road system



Realization of optimal PLT/PLT model

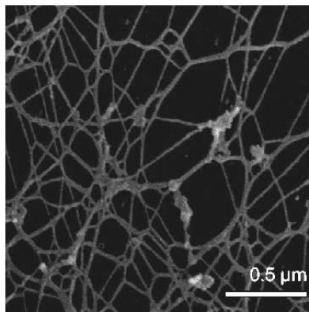
abschließende Bemerkungen

Diskussion / Ausblick

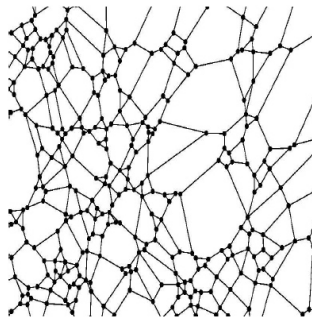
- Auswahl-Algorithmus nicht optimal, da sehr hoher Rechenaufwand
- im nicht-iterierten Fall gibt es analytische Lösung
- im iterierten Fall wären numerische Verfahren wie z.B. Nelder-Mead besser
- Verfahren auch in anderen Bereichen einsetzbar

Beispiel aus der Biologie

Keratin Filament Networks



(a) Grayscale sample image

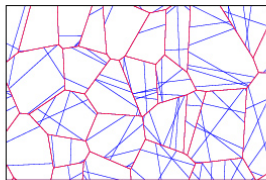
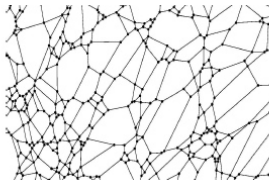


(b) Corresponding graph structure

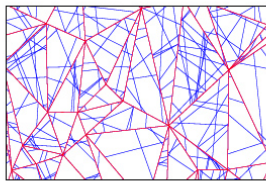
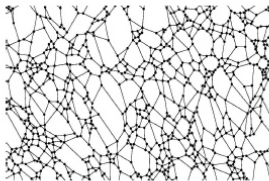
Figure 1: Image segmentation algorithm

Beispiel aus der Biologie

Keratin Filament Networks



a) Segmented graph structure and sample realization of optimal PVT/PLT model for the group of untreated cells



b) Segmented graph structure and sample realization of optimal PDT/PLT model for the group of cells stimulated with TGFα

Quellenverzeichnis

- R.Maier,V.Schmidt
Stationary iterated tessellations
- C.Gloaguen,F.Fleischer,H.Schmidt,V.Schmidt
Fitting of stochastic telecommunication network models via distance measures and Monte-Carlo tests
- M.Beil,S.Eckel,F.Fleischer,H.Schmidt,V.Schmidt,P.Walther
Fitting of random tessellation models to keratin filament networks
- Wikipedia