



## Bayesian Estimation and Segmentation of Spatial Point Processes Using Voronoi Tilings

René Gaisbauer Tibor Schnurr | 18.06.2008 |  
Institut für Stochastik

Seminar "Stochastische Geometrie und ihre  
Anwendungen - Zufällige Netzwerke"

# Gliederung

## Motivation

Ziel

Vorteile der Bayesschen Methode

Beispiel

## Idee und Grundlagen des Modells

Mathematische Definitionen

Idee

## Allgemeine Bayessche Formulierung

Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

## Diskussion

## Gliederung

### Motivation

Ziel

Vorteile der Bayesschen Methode

Beispiel

### Idee und Grundlagen des Modells

Mathematische Definitionen

Idee

Allgemeine Bayessche Formulierung

Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

Diskussion

## Gliederung

### Motivation

Ziel

Vorteile der Bayesschen Methode

Beispiel

### Idee und Grundlagen des Modells

Mathematische Definitionen

Idee

### Allgemeine Bayessche Formulierung

Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

Diskussion

## Gliederung

### Motivation

Ziel

Vorteile der Bayesschen Methode

Beispiel

### Idee und Grundlagen des Modells

Mathematische Definitionen

Idee

### Allgemeine Bayessche Formulierung

### Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Diskussion

## Gliederung

### Motivation

Ziel

Vorteile der Bayesschen Methode

Beispiel

### Idee und Grundlagen des Modells

Mathematische Definitionen

Idee

### Allgemeine Bayessche Formulierung

Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Diskussion

## Motivation

### Ziel

- ▶ **Schätzung der Intensität eines Punktprozesses**
- ▶ Zerlegung eines Punktprozesses/ Daten in Regionen hoher und niedriger Intensität

### Vorteile Bayes-Methode

- ▶ mehr Informationen
- ▶ a-posteriori Wahrscheinlichkeiten
- ▶ regionalbezogene Schätzer

### Beispiele

## Motivation

### Ziel

- ▶ Schätzung der Intensität eines Punktprozesses
- ▶ Zerlegung eines Punktprozesses/ Daten in Regionen hoher und niedriger Intensität

### Vorteile Bayes-Methode

- ▶ mehr Informationen
- ▶ a-posteriori Wahrscheinlichkeiten
- ▶ regionalbezogene Schätzer

### Beispiele

## Motivation

### Ziel

- ▶ Schätzung der Intensität eines Punktprozesses
- ▶ Zerlegung eines Punktprozesses/ Daten in Regionen hoher und niedriger Intensität

### Vorteile Bayes-Methode

- ▶ mehr Informationen
- ▶ a-posteriori Wahrscheinlichkeiten
- ▶ regionalbezogene Schätzer

### Beispiele

## Motivation

### Ziel

- ▶ Schätzung der Intensität eines Punktprozesses
- ▶ Zerlegung eines Punktprozesses/ Daten in Regionen hoher und niedriger Intensität

### Vorteile Bayes-Methode

- ▶ mehr Informationen
- ▶ a-posteriori Wahrscheinlichkeiten
- ▶ regionalbezogene Schätzer

### Beispiele

## Motivation

### Ziel

- ▶ Schätzung der Intensität eines Punktprozesses
- ▶ Zerlegung eines Punktprozesses/ Daten in Regionen hoher und niedriger Intensität

### Vorteile Bayes-Methode

- ▶ mehr Informationen
- ▶ a-posteriori Wahrscheinlichkeiten
- ▶ regionalbezogene Schätzer

### Beispiele

## Motivation

### Ziel

- ▶ Schätzung der Intensität eines Punktprozesses
- ▶ Zerlegung eines Punktprozesses/ Daten in Regionen hoher und niedriger Intensität

### Vorteile Bayes-Methode

- ▶ mehr Informationen
- ▶ a-posteriori Wahrscheinlichkeiten
- ▶ regionalbezogene Schätzer

### Beispiele

## Motivation

### Ziel

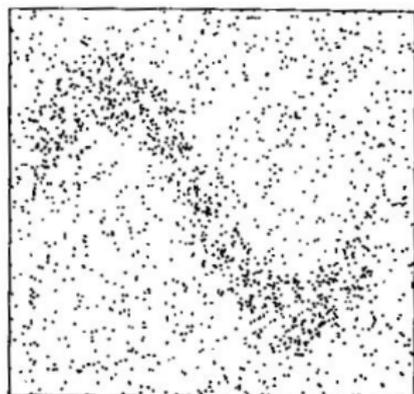
- ▶ Schätzung der Intensität eines Punktprozesses
- ▶ Zerlegung eines Punktprozesses/ Daten in Regionen hoher und niedriger Intensität

### Vorteile Bayes-Methode

- ▶ mehr Informationen
- ▶ a-posteriori Wahrscheinlichkeiten
- ▶ regionalbezogene Schätzer

### Beispiele

## Minenfeld-Erkennungs-Problem



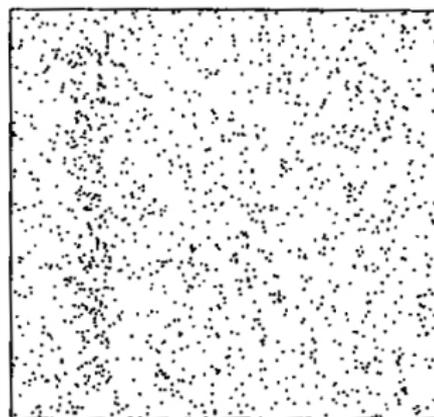
(a)



(b)

Figure 6.1 *Left panel shows a point process on a region, right panel shows an estimate of the points in the high rate region of the data.*

## Minenfeld



(a)



(b)

Figure 6.3 (a) *Simulated minefield with clutter.* (b) *Pointwise posterior probabilities of being inside the minefield.*

# Gliederung

Motivation

Idee und Grundlagen des Modells

Mathematische Definitionen

Idee

Allgemeine Bayessche Formulierung

Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

Diskussion

## Mathematische Grundlagen

### Definitionen

#### Voronoi Tilings

Das Voronoi Tiling einer Punktmenge  $\{c_k, k = 1, \dots, K\}$  in der Ebene ist eine Partition der Ebene in disjunkte Gebiete  $B_k, k = 1, \dots, K$ , so dass  $\forall x \in B_k$  gilt:

$$d(x, c_k) < d(x, c_l), l \neq k.$$

#### Bemerkung

- ▶ Begriffe: Erzeugende Punkte/Kerne, Zellen/Mosaik, Ecken, Kanten
- ▶ Kenntnis der erzeugenden Punkte genügt zur Eindeutigkeit

## Mathematische Grundlagen

### Definitionen

#### Voronoi Tilings

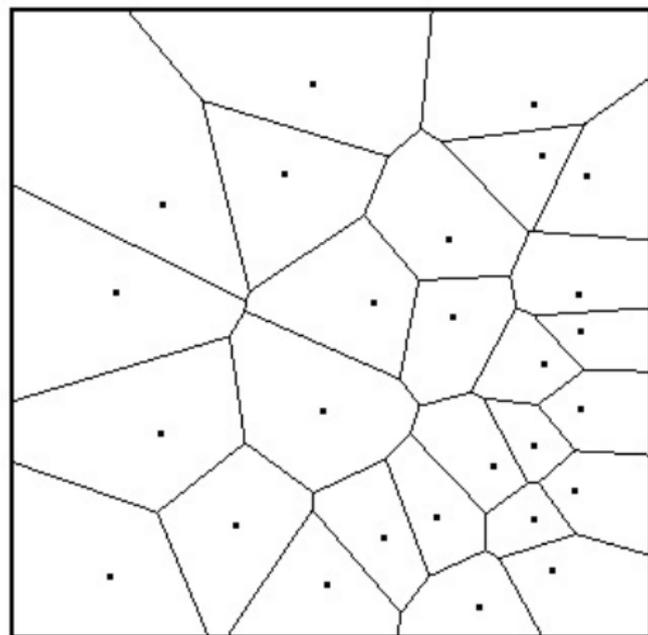
Das Voronoi Tiling einer Punktmenge  $\{c_k, k = 1, \dots, K\}$  in der Ebene ist eine Partition der Ebene in disjunkte Gebiete  $B_k, k = 1, \dots, K$ , so dass  $\forall x \in B_k$  gilt:

$$d(x, c_k) < d(x, c_l), l \neq k.$$

#### Bemerkung

- ▶ Begriffe: Erzeugende Punkte/Kerne, Zellen/Mosaik, Ecken, Kanten
- ▶ Kenntnis der erzeugenden Punkte genügt zur Eindeutigkeit

## Voronoi Tiling



# Mathematische Grundlagen

## Definitionen

### Poisson-Prozess

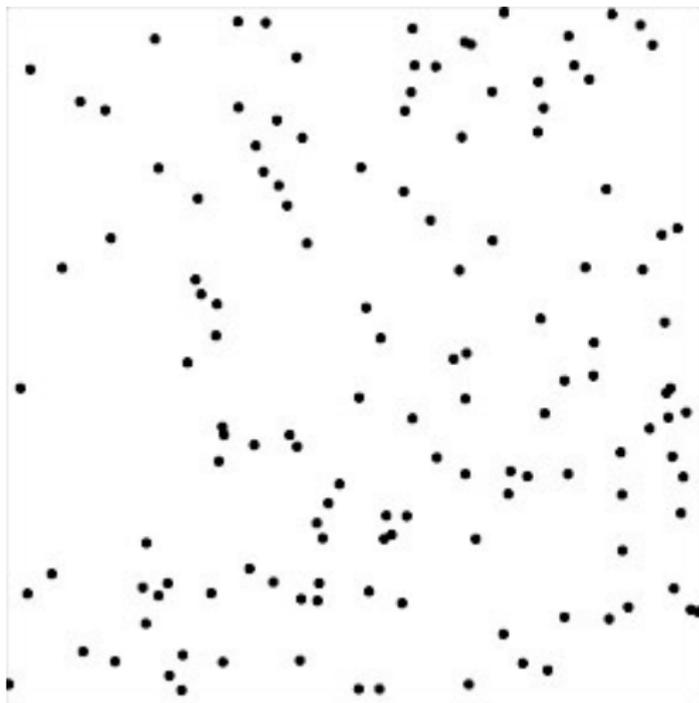
Sei  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  ein beliebiges lokal-endliches Maß ( $\mu(B) < \infty \forall B \in \mathcal{B}_0$ )

- ▶ Man sagt, dass  $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$  ein *Poissonsches Zählmaß* mit dem *Intensitätsmaß*  $\mu$  ist, wenn
  1.  $N_{B_1}, N_{B_2}, \dots$  unabhängige Zufallsvariablen sind für paarweise disjunkte  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  und
  2.  $N_B \sim \text{Poi}(\mu(B))$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ .
- ▶ Gilt zusätzlich

$$\mu(B) = \lambda \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

dann nennt man  $\{N_B\}$  einen homogenen Poisson-Prozess mit der Intensität  $\lambda$ .

## Poisson-Prozess



# Mathematische Grundlagen

## Bayes-Statistik

### Bayes-Theorem

Seien  $A, B$  Ereignisse und  $P(B) > 0$ .

Die Wahrscheinlichkeit  $P(A|B)$  ergibt sich aus

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

wobei man

- ▶  $P(A|B)$  als die a-posteriori Wahrscheinlichkeit
- ▶  $P(B|A)$  als die Likelihood-Funktion
- ▶  $P(A)$  als die a-priori Wahrscheinlichkeit und
- ▶  $P(B)$  als Normierung sehen kann.

# Mathematische Grundlagen

## Bayes-Statistik

### Bayes-Theorem

Seien  $A, B$  Ereignisse und  $P(B) > 0$ .

Die Wahrscheinlichkeit  $P(A|B)$  ergibt sich aus

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

wobei man

- ▶  $P(A|B)$  als die a-posteriori Wahrscheinlichkeit
- ▶  $P(B|A)$  als die Likelihood-Funktion
- ▶  $P(A)$  als die a-priori Wahrscheinlichkeit und
- ▶  $P(B)$  als Normierung sehen kann.

## Idee: Voronoi Tiling Modell

Anpassung des Voronoi Tilings an die Datenpunkte  $\mathbf{y}$

Annahme: Approximation eines Punktprozesses durch einen Poisson-Punktprozess mit stückweise konstanter Intensität

# Gliederung

Motivation

Idee und Grundlagen des Modells

**Allgemeine Bayessche Formulierung**

Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

Diskussion

## Allgemeine Formulierung des Voronoi Tiling Modells

Likelihood-Funktion  $\propto \prod_{k=1}^K \lambda_k^{n_k} \exp \{-\lambda_k a_k\}$

A-priori Verteilungen  $K \sim Poi(\nu)$   
 $\{\lambda_k; k = 1, \dots, K\} | K \text{ iid} \sim Gamma(a, b)$   
 $\{\mathbf{c}_k; k = 1, \dots, K\} | K \text{ iid} \sim U\{S\}$

wobei

- ▶  $a_k$  die Fläche der  $k$ -ten Zelle oder der Menge/Region  $B_k$
- ▶  $n_k$  die Anzahl der Punkte auf der  $k$ -ten Zelle
- ▶  $S$  betrachtete Region

## Allgemeine Formulierung des Voronoi Tiling Modells

### Bemerkungen

- ▶ Anzahl der Zellen  $K$  in dieser Formulierung eigentlich nicht fest
  - ▶ Annahme:  $K$  fest.
- ▶ Möglichkeit für höhere Flexibilität bei der Partitionierung der Region durch Voronoi Tilings
  - ▶ Hyperpriori für Parameter  $\nu$

## Allgemeine Formulierung des Voronoi Tiling Modells

### Bemerkungen

- ▶ Anzahl der Zellen  $K$  in dieser Formulierung eigentlich nicht fest
  - ▶ Annahme:  $K$  fest.
- ▶ Möglichkeit für höhere Flexibilität bei der Partitionierung der Region durch Voronoi Tilings
  - ▶ Hyperpriori für Parameter  $\nu$

## Erstes Ergebnis dieser Formulierung

### A-posteriori Verteilung

$$\pi(K, \{\lambda_k, \mathbf{c}_k; k = 1, \dots, K\} | \mathbf{y}) \propto \frac{\nu^K}{K!} \prod_{k=1}^K \lambda_k^{n_k + a - 1} \exp\{-\lambda_k (a_k + b)\}$$

## Erstes Ergebnis dieser Formulierung

### A-posteriori Verteilung

$$\pi(K, \{\lambda_k, \mathbf{c}_k; k = 1, \dots, K\} | \mathbf{y}) \propto \frac{\nu^K}{K!} \prod_{k=1}^K \lambda_k^{n_k + a - 1} \exp\{-\lambda_k (a_k + b)\}$$

## Möglichkeit zur Implementierung

### Markov chain Monte Carlo

- ▶ Hier: Anpassung des Modells durch MCMC-Simulationen der a-posteriori Verteilung mit gegebenen Daten
- ▶ Algorithmus Metropolis-Hastings-Typ
  - ▶ Kenntnis über eine zu der a-posteriori Verteilung *proportionale* Funktion genügt
- ▶ Akzeptanz-/Verwerfungsalgorithmus

## Möglichkeit zur Implementierung

### Markov chain Monte Carlo

- ▶ Hier: Anpassung des Modells durch MCMC-Simulationen der a-posteriori Verteilung mit gegebenen Daten
- ▶ Algorithmus Metropolis-Hastings-Typ
  - ▶ Kenntnis über eine zu der a-posteriori Verteilung *proportionale* Funktion genügt
- ▶ Akzeptanz-/Verwerfungsalgorithmus

## Möglichkeit zur Implementierung

### Markov chain Monte Carlo

- ▶ Hier: Anpassung des Modells durch MCMC-Simulationen der a-posteriori Verteilung mit gegebenen Daten
- ▶ Algorithmus Metropolis-Hastings-Typ
  - ▶ Kenntnis über eine zu der a-posteriori Verteilung *proportionale* Funktion genügt
- ▶ Akzeptanz-/Verwerfungsalgorithmus

## Möglichkeit zur Implementierung

### Markov chain Monte Carlo

- ▶ Hier: Anpassung des Modells durch MCMC-Simulationen der a-posteriori Verteilung mit gegebenen Daten
- ▶ Algorithmus Metropolis-Hastings-Typ
  - ▶ Kenntnis über eine zu der a-posteriori Verteilung *proportionale* Funktion genügt
- ▶ Akzeptanz-/Verwerfungsalgorithmus

## Möglichkeit zur Implementierung

### Markov chain Monte Carlo mit dynamischen Voronoi Tilings

- ▶ A-posteriori Verteilung
  - ▶ der Anzahl der Zellen,
  - ▶ der Positionen der Kerne und
  - ▶ der Intensitäten von jeder Zelle

liefert

- ▶ einen Schätzer der Intensität und
- ▶ die Streuung des Schätzers

als eine Funktion des Raumes (*hier der Fläche*).

- ▶ Aufteilung des Verfahrens in zwei Fälle
  - ▶ Feste Anzahl der Zellen
  - ▶ Variable Anzahl der Zellen

## Möglichkeit zur Implementierung

### Markov chain Monte Carlo mit dynamischen Voronoi Tilings

- ▶ A-posteriori Verteilung
  - ▶ der Anzahl der Zellen,
  - ▶ der Positionen der Kerne und
  - ▶ der Intensitäten von jeder Zelle

liefert

- ▶ einen Schätzer der Intensität und
- ▶ die Streuung des Schätzers

als eine Funktion des Raumes (*hier der Fläche*).

- ▶ Aufteilung des Verfahrens in zwei Fälle
  - ▶ Feste Anzahl der Zellen
  - ▶ Variable Anzahl der Zellen

## Möglichkeit zur Implementierung

### Markov chain Monte Carlo mit dynamischen Voronoi Tilings

- ▶ A-posteriori Verteilung
  - ▶ der Anzahl der Zellen,
  - ▶ der Positionen der Kerne und
  - ▶ der Intensitäten von jeder Zelle

liefert

- ▶ einen Schätzer der Intensität und
- ▶ die Streuung des Schätzers

als eine Funktion des Raumes (*hier der Fläche*).

- ▶ Aufteilung des Verfahrens in zwei Fälle
  - ▶ Feste Anzahl der Zellen
  - ▶ Variable Anzahl der Zellen

## Möglichkeit zur Implementierung

### Feste Anzahl der Zellen

- ▶ Bedingte Verteilung der Parameter

$$\pi(\lambda_k | \dots) \sim \text{Gamma}(n_k + a, a_k + b), k = 1, \dots, K$$

$$\pi(\mathbf{c}_k | \dots) \propto \prod_{k=1}^K \lambda_k^{n_k + a - 1} \exp\left\{-\sum_{k=1}^K \lambda_k (a_k + b)\right\}, k = 1, \dots, K.$$

- ▶ Notation:  $|\dots$  bezeichne die Bedingtheit *aller* anderen Parameter *und* der Daten.

## Möglichkeit zur Implementierung

### Feste Anzahl der Zellen - Das Verfahren

#### Vorgehensweise

1. Vorschlag Punkte zu bewegen
2. Neuberechnung Voronoi Tiling
3. Akzeptanz-Wahrscheinlichkeit für das neue Voronoi Tiling gegenüber dem Alten
4. Verändere die Punkte dementsprechend
5. Wiederhole Schritte 1 bis 4

## Implementierungen

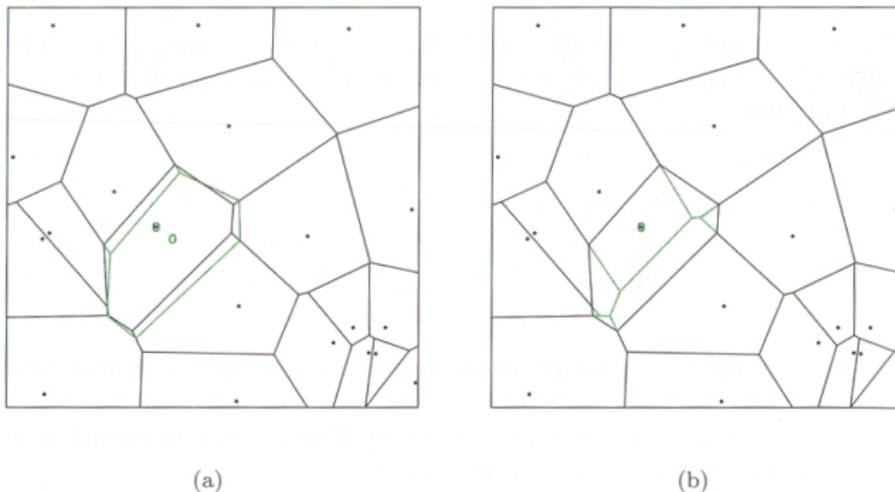
### Feste Anzahl der Zellen - Das Verfahren

Drei Schemas:

1. Vorschlag einen erzeugenden Punkt eine *kleine* Distanz zu bewegen
2. Vorschlag einen erzeugenden Punkt irgendwohin in der Region zu bewegen
  - ▶ Dies entspricht dem Löschen eines Kerns und gleichzeitigem Hinzufügen eines Kerns. Auch bei den Intensitäten könnte Änderung vorgeschlagen werden.
3. Vorschlag alle erzeugenden Punkte eine kleine Distanz zu bewegen
  - ▶ Aufdecken von Details bei Unstetigkeiten in der Intensität

## Implementierungen

### Grafische Veranschaulichung



*Examples of two types of proposal for altering the Voronoi tiling in the MCMC algorithm. (a) Proposed movement of a generating point from the ringed point to the empty circle. (b) Deletion (or addition) of the ringed generating point. The dotted lines indicate the induced changes to the tiling.*

## Implementierung

### variable Anzahl der Zellen

- ▶ Es ist wünschenswert eine flexible Anzahl an Zellen zuzulassen, um die Anpassungsfähigkeit des Tilings an das Muster der Daten-Punkte zu verbessern
- ▶ Ist bspw. die Anzahl der Zellen zu gering, fehlt u.U. die Möglichkeit Details zu erfassen
- ▶ Hierfür muss die herkömmliche Markov Chain Monte Carlo Methode mit reversible jump MCMC erweitert werden
- ▶ Zusätzlich zu Verschiebungen der Punkte kommt jetzt noch das Zufügen und das Entfernen eines Punktes hinzu
- ▶ Zufügen und Entfernen verursacht nur lokale Effekte beim Tiling
- ▶ Kleine Verschiebungen können das Tiling auch verändern

# Gliederung

Motivation

Idee und Grundlagen des Modells

Allgemeine Bayessche Formulierung

Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

Diskussion

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Ziel

Auf zwei Intensitäten basierende Zerlegung des Punktprozesses in zwei disjunkte, nicht unbedingt zusammenhängende Gebiete, so dass der Prozess stückweise konstante Intensitäten besitzt.

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Modell

- ▶ Zu betrachtende Region **S**
- ▶ Gebiet  $A_0$ , in das  $N_0$  Datenpunkte fallen
- ▶ Gebiet  $A_1$ , in das  $N_1$  Datenpunkte fallen
- ▶  $A_0$  hat Intensität  $\mu_0$
- ▶  $A_1$  hat Intensität  $\mu_0 + \mu_1$
- ▶ Klassifikation hoch/niedrig der Zellen in Variablen  $d_k, k = 1, \dots, K$  angegeben;  $d_k = 1$  hoch und  $d_k = 0$  niedrig
- ▶ Menge  $\{c_k; k = 1, \dots, K\}$  sind Positionen der erzeugenden Punkte

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Modell

$$\text{Likelihood} \propto \mu_0^{N_0} (\mu_0 + \mu_1)^{N_1} \exp \{-\mu_0 A_0 - (\mu_0 + \mu_1) A_1\}$$

### A-priori Verteilungen

- ▶  $\mu_0, \mu_1 \sim \text{Gamma}(a, b)$
- ▶  $K \sim \text{Poisson}(\nu)$
- ▶  $\{d_k; k = 1, \dots, K\} | K \sim \text{Bernoulli}(p)$
- ▶  $\{c_k; k = 1, \dots, K\} | K \sim U\{S\}$

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Modell

$$\text{Likelihood} \propto \mu_0^{N_0} (\mu_0 + \mu_1)^{N_1} \exp \{-\mu_0 A_0 - (\mu_0 + \mu_1) A_1\}$$

### A-priori Verteilungen

- ▶  $\mu_0, \mu_1 \sim \text{Gamma}(a, b)$
- ▶  $K \sim \text{Poisson}(\nu)$
- ▶  $\{d_k; k = 1, \dots, K\} | K \sim \text{Bernoulli}(p)$
- ▶  $\{c_k; k = 1, \dots, K\} | K \sim U\{S\}$

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Feste Anzahl an Zellen

### MCMC Algorithmus

- ▶ Aktualisiere die zwei Intensitäten des Prozesses
- ▶ Ändere die Klassifikation einer Zelle von hoch zu niedrig oder von niedrig zu hoch
- ▶ Verschiebe einen oder mehrere erzeugende Punkte

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Feste Anzahl an Zellen

### MCMC Algorithmus

- ▶ Aktualisiere die zwei Intensitäten des Prozesses
- ▶ Ändere die Klassifikation einer Zelle von hoch zu niedrig oder von niedrig zu hoch
- ▶ Verschiebe einen oder mehrere erzeugende Punkte

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Feste Anzahl an Zellen

### MCMC Algorithmus

- ▶ Aktualisiere die zwei Intensitäten des Prozesses
- ▶ Ändere die Klassifikation einer Zelle von hoch zu niedrig oder von niedrig zu hoch
- ▶ Verschiebe einen oder mehrere erzeugende Punkte

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Feste Anzahl an Zellen

Zur einfacheren Notation sei:

$$\xi = \exp \{ -\mu_0(A_0 + A_1 + b) - \mu_1(A_1 + b) \}$$

### a-posteriori Verteilung

$$\pi(\mu_0, \mu_1, \{d_k, c_k; k = 1, \dots, K\} | \mathbf{y}) \propto$$

$$\mu_0^{N_0+a-1} \mu_1^{a-1} (\mu_0 + \mu_1)^{N_1} \prod_{k=1}^K p^{d_k} (1-p)^{1-d_k} \times \xi$$

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Feste Anzahl an Zellen

### bedingte Verteilungen der Parameter

- ▶  $\pi(\mu_0, \mu_1 | \dots) \propto \mu_0^{N_0+a-1} \mu_1^{a-1} (\mu_0 + \mu_1)^{N_1} \times \xi$
- ▶  $\pi(d_k | \dots) \propto p^{d_k} (1-p)^{1-d_k} \mu_0^{N_0+a-1} \mu_1^{a-1} (\mu_0 + \mu_1)^{N_1} \times \xi$
- ▶  $\pi(c_k | \dots) \propto \mu_0^{N_0+a-1} \mu_1^{a-1} (\mu_0 + \mu_1)^{N_1} \times \xi$

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Feste Anzahl an Zellen

### MCMC Algorithmus

- ▶ Schritte im MCMC-Algorithmus ähnlich zu denen bei der vorherigen allgemeinen Formulierung

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Feste Anzahl an Zellen

### Akzeptanzwahrscheinlichkeit

Akzeptanzwahrscheinlichkeit  $\alpha$  gegeben durch

$$\alpha = \min \{1, R\} .$$

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Feste Anzahl an Zellen

$$\blacktriangleright R(\mu_0, \mu_1; \acute{\mu}_0, \acute{\mu}_1) = \left( \frac{\acute{\mu}_0 \acute{\mu}_1}{\mu_0 \mu_1} \right)^{a-1} \left( \frac{\mu_0}{\acute{\mu}_0} \right)^{N_0} \left( \frac{\acute{\mu}_0 + \acute{\mu}_1}{\mu_0 + \mu_1} \right)^{N_1} \times \exp \{ -\mathbf{A}_0(\acute{\mu}_0 - \mu_0) - (\mathbf{b} + \mathbf{A}_1)(\acute{\mu}_0 + \acute{\mu}_1 - \mu_0 - \mu_1) \}$$

$$\blacktriangleright R(d_k; \acute{d}_k) = \left( \frac{\mu_0}{\mu_0 + \mu_1} \right)^{-n_k} \exp(-\mu_1 a_k)$$

wobei

- $n_k$  die Anzahl der Punkte in Zelle  $k$
- $a_k$  die Fläche der Zelle  $k$

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Feste Anzahl an Zellen

- ▶  $R(\mu_0, \mu_1; \acute{\mu}_0, \acute{\mu}_1) = \left(\frac{\acute{\mu}_0 \acute{\mu}_1}{\mu_0 \mu_1}\right)^{a-1} \left(\frac{\mu_0}{\acute{\mu}_0}\right)^{N_0} \left(\frac{\acute{\mu}_0 + \acute{\mu}_1}{\mu_0 + \mu_1}\right)^{N_1} \times \exp\{-\mathbf{A}_0(\acute{\mu}_0 - \mu_0) - (\mathbf{b} + \mathbf{A}_1)(\acute{\mu}_0 + \acute{\mu}_1 - \mu_0 - \mu_1)\}$
- ▶  $R(d_k; \acute{d}_k) = \left(\frac{\mu_0}{\mu_0 + \mu_1}\right)^{-n_k} \exp(-\mu_1 a_k)$

wobei

- ▶  $n_k$  die Anzahl der Punkte in Zelle  $k$
- ▶  $a_k$  die Fläche der Zelle  $k$

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Feste Anzahl an Zellen

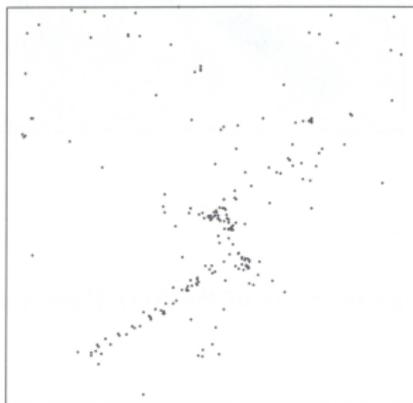
$$\begin{aligned} \blacktriangleright R(c_k; \hat{c}_k) &= \left( \frac{\hat{\mu}_0 \hat{\mu}_1}{\mu_0 \mu_1} \right)^{a-1} \frac{\hat{\mu}_0^{N_0} (\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_0)^{N_1}}{\mu_0^{N_0} (\mu_1 + \mu_0)^{N_1}} \times \\ &\exp \left\{ -\hat{A}_0 \hat{\mu}_0 + A_0 \mu_0 - (b + \hat{A}_1)(\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_0) + (b + A_1)(\mu_1 + \mu_0) \right\} \end{aligned}$$

## Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

### Variable Anzahl an Zellen

- ▶ Wie in der allgemeinen Formulierung ist es wünschenswert eine variable Anzahl an Zellen zuzulassen
- ▶ Erweiterung ist ähnlich wie zuvor ( $\leftrightarrow$  reversible jump MCMC)
- ▶ Position eines neu erzeugten Punkt ist gleichverteilt auf  $S$
- ▶ Neue Zelle muss entweder der hohen oder der niedrigen Intensität zugeteilt werden
- ▶ Am einfachsten wird die neue Zelle zufällig über die a-Priori Verteilung einer Intensität zugewiesen

## Beispiel



(a)



(b)

(a) *The New Madrid earthquake data, and (b) a Bayesian posterior probability segmentation.*

# Gliederung

Motivation

Idee und Grundlagen des Modells

Allgemeine Bayessche Formulierung

Zerlegung in zwei Bereiche unterschiedlicher Intensität

Diskussion

## Diskussion

- ▶ Methoden zur Segmentierung und Schätzung der Intensität eines Punktprozesses  
Annahme: stückweise konstante Intensität (lokale Homogenität)
- ▶ Vorteil gegenüber Kern-Dichte-Schätzung oder anderen nichtparametrischen Dichte-Schätzungs-Methoden
  - ▶ explizites Modell zur Segmentierung
  - ▶ Wkt.aussagen über Unsicherheit bzgl. der Intensität
  - ▶ Einfache Erweiterung auf markierte Punktprozesse

## Quellen

- ▶ A. Lawson, D. Denison (2002). Spatial Cluster Modelling, Chapman & Hall/CRC
- ▶ P.J. Green (1995). *Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination*, Biometrika **82**
- ▶ V.Schmidt (2008). Skript Räumliche Statistik

## Bilder

- ▶ A. Lawson, D. Denison (2002). *Spatial Cluster Modelling*, Chapman & Hall/CRC
- ▶ S.D. Byers, A.E. Raftery (1998). *Nearest neighbor clutter removal for estimating features in spatial point processes*, J. Amer. Statist. Assoc. **93**
- ▶ A. Dasgupta, A.E. Raftery (1998). *Detecting features in spatial point processes with clutter via model-based clustering*, J. Amer. Statist. Assoc. **93**