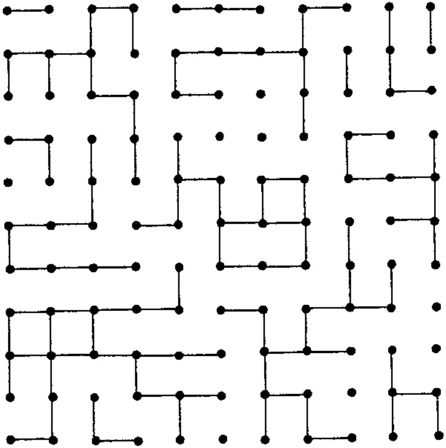
Properties of connectivity clusters

Julia Hocke
Sabine Ott

Einleitung

Abbildung: Zufallsgitter



Source: M. Franceschetti and R. Meester(2007) "Random Networks for Communication".Cambridge University Press, page 5

Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

- **Definition:**
  Ein Ereignis A heißt *wachsend* , falls A immer noch gilt, wenn man eine neue Kante hinzufügt.

  Eine Zufallsvariable heißt *wachsend*, falls ihr Wert nicht fällt, wenn man eine neue Kante hinzufügt.

  Beispiel: Das Ereignis, dass es einen Pfad zwischen 2 Knoten gibt, ist wachsend.

Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

- **Definition:**
  Ein Ereignis A heißt *wachsend* , falls A immer noch gilt, wenn man eine neue Kante hinzufügt.

  Eine Zufallsvariable heißt *wachsend*, falls ihr Wert nicht fällt, wenn man eine neue Kante hinzufügt.

  Beispiel: Das Ereignis, dass es einen Pfad zwischen 2 Knoten gibt, ist wachsend.

- **Lemma 1:** (*Harris-FKG-Ungleichung*)
  Falls A und B wachsende Ereignisse sind, dann gilt:

  $$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A) P_p(B).$$

  Falls X, Y wachsende Zufallsvariablen sind, mit $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ und $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$, dann gilt:

  $$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X)\,\mathbb{E}_p(Y),$$

  d.h. dass X und Y positiv korreliert sind.

Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

- **Lemma 2:**
  Für alle $0<p<1$ gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$, so dass die Anzahl der unendlichen Cluster auf dem Zufallsgitter f.s. gleich c ist.

Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

- **Lemma 2:**
  Für alle $0<p<1$ gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$, so dass die Anzahl der unendlichen Cluster auf dem Zufallsgitter f.s. gleich c ist.

- **Lemma 3:**
  Für alle $0<p<1$ ist die Anzahl der unendlichen Cluster f.s 0, 1 oder ∞.

Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

- **Lemma 2:**
  Für alle $0<p<1$ gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{N}$, so dass die Anzahl der unendlichen Cluster auf dem Zufallsgitter f.s. gleich c ist.

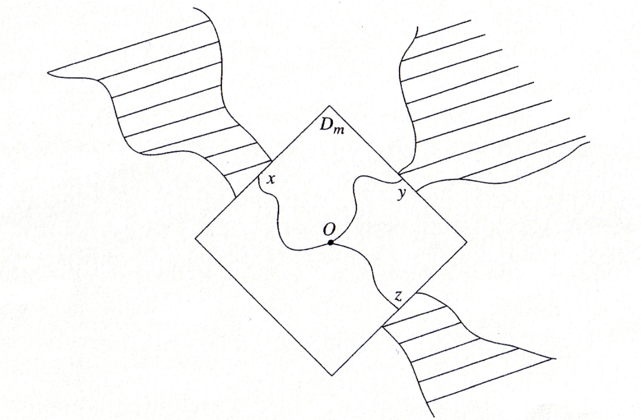
- **Lemma 3:**
  Für alle $0<p<1$ ist die Anzahl der unendlichen Cluster f.s 0, 1 oder ∞.

- **Theorem 1:**(*Eindeutigkeitsaussage*)
  Sei Q das Ereignis, dass es höchstens eine unendliche verbundene Komponente auf dem Kantenperkolationsmodell gibt.
  Es gilt

$$\mathbb{P}_p(Q) = 1 \quad \forall p$$

Beweis Theorem 1

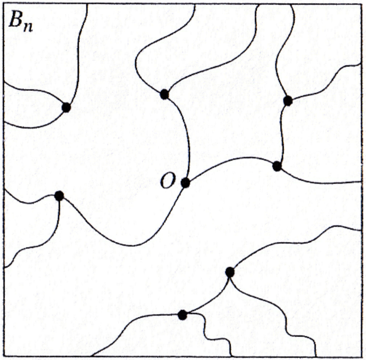
Abbildung: Raute D_m



Source: M. Franceschetti and R. Meester(2007) "Random Networks for Communication".Cambridge University Press, page 102

Beweis Theorem 1

Abbildung: Box B_n



Source: M. Franceschetti and R. Meester(2007) ”Random Networks for Communication”.Cambridge University Press, page 103

Berechnung der Perkolationsschwelle

Berechnung der Perkolationsschwelle

- **Theorem 2:**
  Für Kantenperkolation auf dem 2-dimensionalen quadratischen Zufallsgitter gilt:

  $$p_c \geq \frac{1}{2}$$

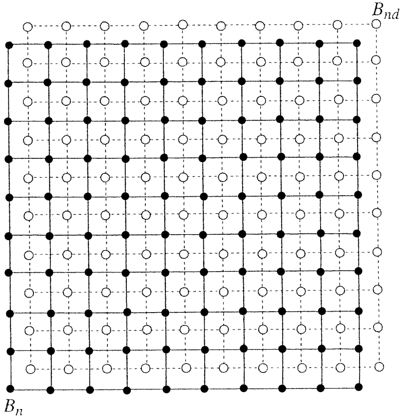
Berechnung der Perkolationsschwelle

- **Theorem 2:**
  Für Kantenperkolation auf dem 2-dimensionalen quadratischen Zufallsgitter gilt:
  $$p_c \geq \frac{1}{2}$$

- **Lemma 4:**(*Quadratwurzel-Trick*)
  Seien $A_1, ..., A_m$ wachsende Ereignisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit.
  Es gilt:
  $$\mathbb{P}_p(A_1) \geq 1 - (1 - \mathbb{P}_p(\bigcup_{i=1}^{m} A_i))^{\frac{1}{m}}$$

Beweis Theorem 2

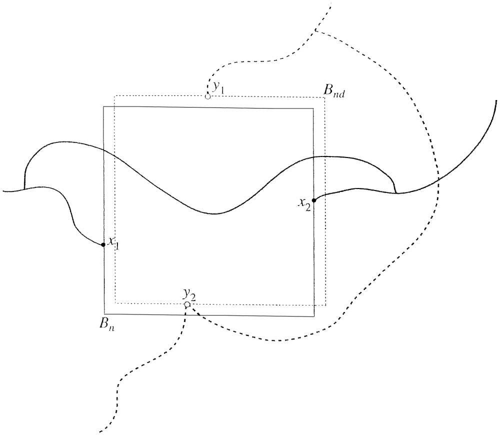
Abbildung: Duale Box um $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ verschoben



Source: M. Franceschetti and R. Meester(2007) "Random Networks for Communication".Cambridge University Press, page 105

Beweis Theorem 2

Abbildung: Box B_n und die duale Box B_{nd}



Source: M. Franceschetti and R. Meester(2007) "Random Networks for Communication".Cambridge University Press, page 106

Berechnung der Perkolationsschwelle

Definition:
$B_n^{\leftrightarrow}$ sei das Ereignis, dass es einen Pfad innerhalb von B_n gibt, der die linke Seite von B_n mit der rechten Seite verbindet.

$0 \leftrightarrow \partial B_{2n}$ sei das Ereignis, dass es einen Pfad gibt, der den Ursprung mit dem Rand von B_{2n} verbindet.

Berechnung der Perkolationsschwelle

- **Lemma 5:**
  Für $p < p_c$ und $\forall n \ \exists \ \beta(p) > 0$:

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial B_{2n}) \leq e^{-\beta(p)n}$$

$$\mathbb{P}_p(B_n^{\leftrightarrow}) \leq (n+1)e^{-\beta(p)n}$$

Berechnung der Perkolationsschwelle

- **Lemma 5:**
  Für $p < p_c$ und $\forall n \ \exists \ \beta(p) > 0$:

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial B_{2n}) \leq e^{-\beta(p)n}$$

$$\mathbb{P}_p(B_n^{\leftrightarrow}) \leq (n+1)e^{-\beta(p)n}$$

- **Lemma 6:**
  Für $p > p_c$ und $\forall n \ \exists \ \beta(1-p) > 0$:

$$\mathbb{P}_p(B_n^{\leftrightarrow}) \geq 1 - (n+1)e^{-\beta(1-p)n}$$

Berechnung der Perkolationsschwelle

- **Theorem 3:**
  Die Perkolationsschwelle für Kantenperkolation auf dem quadratischen Gitter ist beschränkt durch $p_c \leq \frac{1}{2}$.

Berechnung der Perkolationsschwelle

- **Theorem 3:**
  Die Perkolationsschwelle für Kantenperkolation auf dem quadratischen Gitter ist beschränkt durch $p_c \leq \frac{1}{2}$.

- *Erinnerung: Theorem 2*
  Die Perkolationsschwelle für Kantenperkolation auf dem quadratischen Gitter ist beschränkt durch $p_c \geq \frac{1}{2}$.

Berechnung der Perkolationsschwelle

- **Theorem 3:**
  Die Perkolationsschwelle für Kantenperkolation auf dem quadratischen Gitter ist beschränkt durch $p_c \leq \frac{1}{2}$.

- *Erinnerung: Theorem 2*
  Die Perkolationsschwelle für Kantenperkolation auf dem quadratischen Gitter ist beschränkt durch $p_c \geq \frac{1}{2}$.

- Daraus folgt:
  Theorem 4:
  Für Kantenperkolation auf dem quadratischen Gitter gilt: $p_c = \frac{1}{2}$.

Quelle

M. Franceschetti and R. Meester(2007):
"Random Networks for Communication". Cambridge University Press