



## Zufällige Mosaik: Eine Einführung

# Inhalt

## Einführung

## Deterministische Mosaik

## Zufällige Mosaik

## Mathematische Analyse

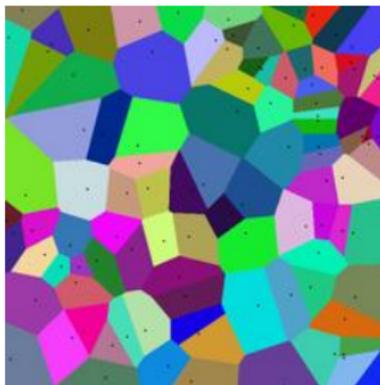
## Statistik

## Schluss

## Agenda

- ▶ Was ist ein Mosaik bzw. ein zufälliges Mosaik?
- ▶ Wozu braucht man es?
- ▶ Wie kann man es erzeugen?
- ▶ Was sind seine grundlegenden Eigenschaften?
- ▶ Wie kann man Aussagen über diese Eigenschaften treffen?

Abbildung: Mosaik



# Inhalt

Einführung

Deterministische Mosaik

Zufällige Mosaik

Mathematische Analyse

Statistik

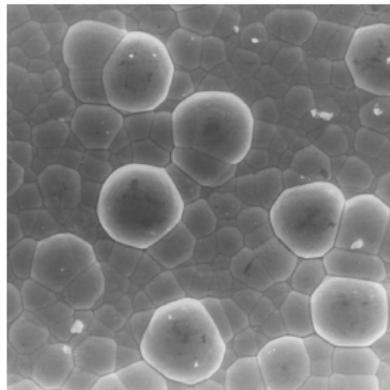
Schluss

## Motivation

In den Materialwissenschaften treten folgende Strukturen auf :

- ▶ Bausteine füllen die Ebene vollständig aus
- ▶ sie überlappen sich nicht
- ▶ modellierbar durch zufällige Mosaik
- ▶ Ziel: Aussagen über Eigenschaften der Strukturen

**Abbildung:** Elektronenmikroskopisches Bild einer alkalischen Zink-Nickel Schicht



# Inhalt

Einführung

**Deterministische Mosaik**

Zufällige Mosaik

Mathematische Analyse

Statistik

Schluss

# Mosaik

## Definition

Sei  $\mathbb{P}$  Menge aller beschränkten offenen konvexen nicht leeren Polygone  $p$  im  $\mathbb{R}^2$ . Eine Teilmenge  $\theta \subset \mathbb{P}$  heißt *Mosaik* (engl. tessellation), falls gilt:

1.  $p_1 \cap p_2 = \emptyset$ , wenn  $p_1, p_2 \in \theta$  und  $p_1 \neq p_2$
2.  $\bigcup_{p \in \theta} \bar{p} = \mathbb{R}^2$
3.  $\theta$  ist lokal endlich, d.h. wenn  $B \subset \mathbb{R}^2$  beschränkt, dann ist  $\{p \in \theta : p \cap B \neq \emptyset\}$  endlich

## Erinnerung

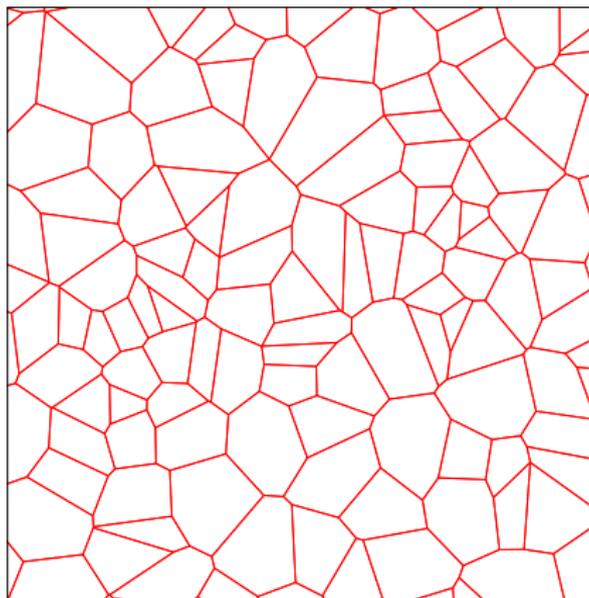
Ein Polygon ist ein Vieleck im  $\mathbb{R}^2$

## Bezeichnungen

Sei  $\theta$  ein Mosaik im  $\mathbb{R}^2$  und  $p \in \theta$ :

- ▶  $p$  heißt *Zelle*
- ▶ die Ecken von  $p$  heißen *Knoten*
- ▶ die Seiten von  $p$  heißen *Kanten*
- ▶  $E_\theta$  sei Vereinigung aller Kanten von  $\theta$

## Abbildung: Mosaik

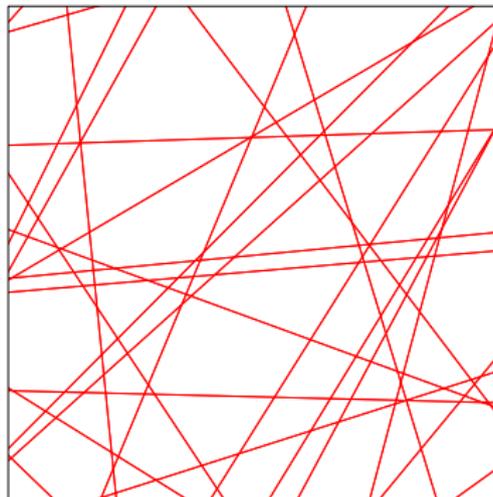


# Verschiedene Typen von Mosaiken

## Geraden Mosaik

Aufteilung des  $\mathbb{R}^2$  in konvexe Polygone mittels Geraden

Abbildung: Geraden Mosaik



## Voronoi Mosaik

- ▶ Sei  $\varphi = \{x_1, x_2, \dots\}$  lokal endliches System von Punkten im  $\mathbb{R}^2$
- ▶ Aufteilung des  $\mathbb{R}^2$  in Zellen, die jeweils genau einen Punkt von  $\varphi$  im Inneren enthalten nach Nächsten-Nachbarn Prinzip
- ▶ Für  $x_n, x_m \in \varphi, n \neq m$  betrachte die Halbebene

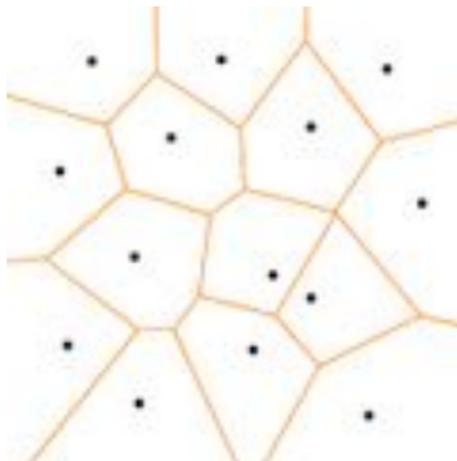
$$H(x_n, x_m) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - x_n\| \leq \|x - x_m\|\} \quad (1)$$

bzw. das Polygon

$$P(x_n) = \bigcap_{m \neq n} H(x_n, x_m) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - x_n\| \leq \|x - x_m\| \quad \forall m \neq n\} \quad (2)$$

- ▶ falls alle Polygone beschränkt  $\rightsquigarrow$  Voronoi Mosaik  $V(\varphi)$

## Abbildung: Voronoi Mosaik



## Konstruktion von Voronoi Polygonen

- ▶ Kantenbildung als Mittelsenkrechte auf die Verbindungslinie  $d$  zweier Zentren (Nuklei)
- ▶ Schnittpunkte der Mittelsenkrechten bilden Eckpunkte der Voronoi Zelle

Abbildung: Konstruktion der Mittelsenkrechten

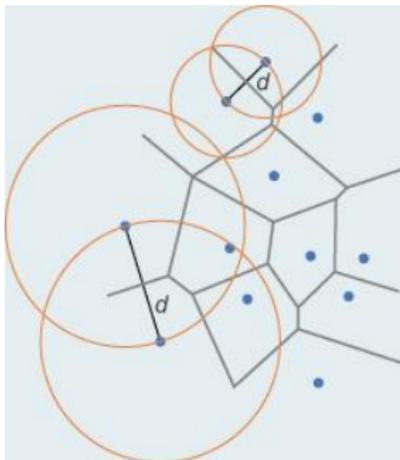
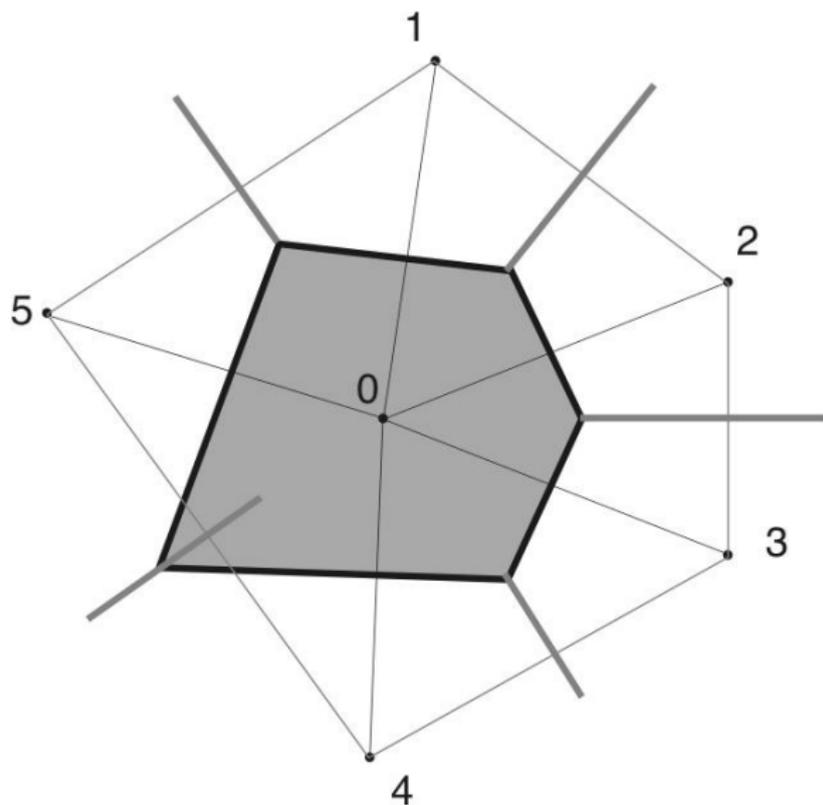


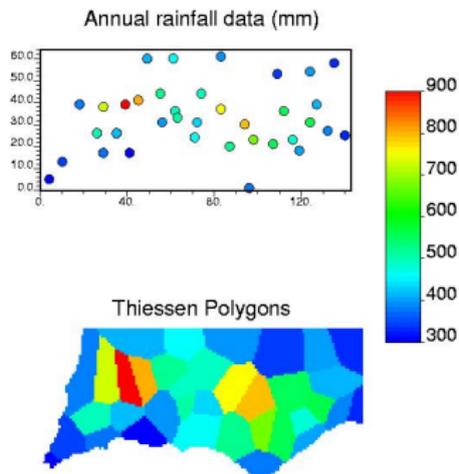
Abbildung: Schnitt der Mittelsenkrechten



## Anwendung

- ▶ kartographische Darstellung von Messwerten
- ▶ Daten von einigen Messstationen auf gesamte Fläche verallgemeinern
- ▶ z.B. bei der Messung von Niederschlägen

Abbildung: Niederschlagsdaten



## Alternative Interpretation des Voronoi Mosaiks

### Als Ergebnis eines Wachstumsprozesses

- ▶ Sei wieder  $\varphi = \{x_1, x_2, \dots\}$  lokal endliches System von Punkten im  $\mathbb{R}^2$
- ▶ Punkte von  $\varphi$  sind Keimpunkte
- ▶ Wachstum beginnt in den Keimpunkten
  - ▶ gleichzeitig
  - ▶ mit gleicher Geschwindigkeit
  - ▶ in alle Richtungen
- ▶ berühren sich wachsende Zellen  $\rightsquigarrow$  Rand der Zellen (Kanten)

interessant zur Modellierung von Mikrostrukturen aus Kristallisationsprozessen

## Abbildung: Wachstumsprozess der Voronoizellen

MATHEMATICAL MODELS FOR RANDOM TESSELLATIONS

311

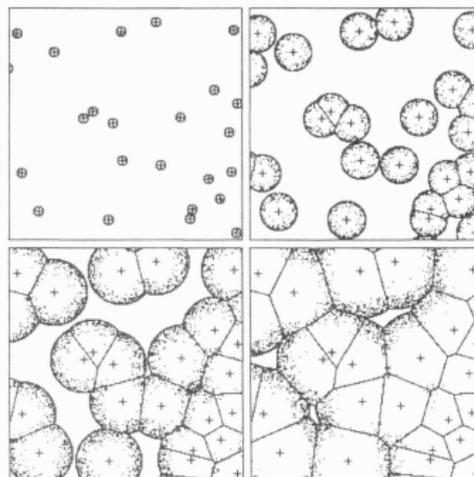


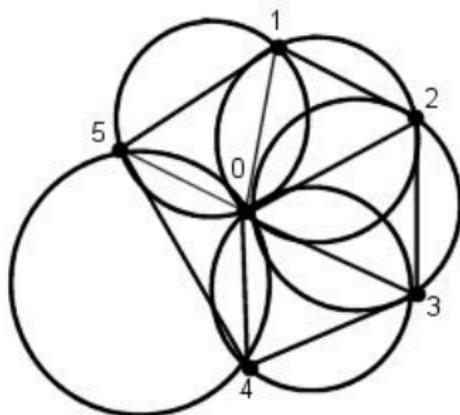
Figure 10.3 Four steps of the growth process which leads to the Dirichlet tessellation

## Delaunay Mosaik

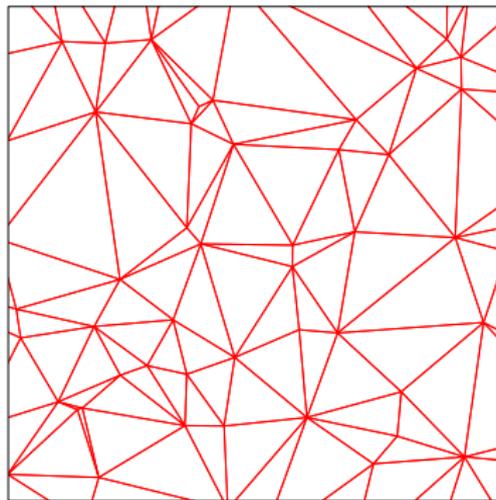
- ▶ Sei  $\varphi = \{x_1, x_2, \dots\}$  lokal endliches System von Punkten im  $\mathbb{R}^2$
- ▶ Erstelle aus  $\varphi$  ein Dreiecksnetz, so dass
  - ▶ kein weiterer Punkt aus  $\varphi$  innerhalb eines Umkreises um 3 Punkte aus  $\varphi$ , die ein Dreieck bilden

↪ Dreiecke bilden ein Mosaik

Abbildung: Umkreisbedingung der Delaunay Dreiecke



## Abbildung: Delaunay Mosaik



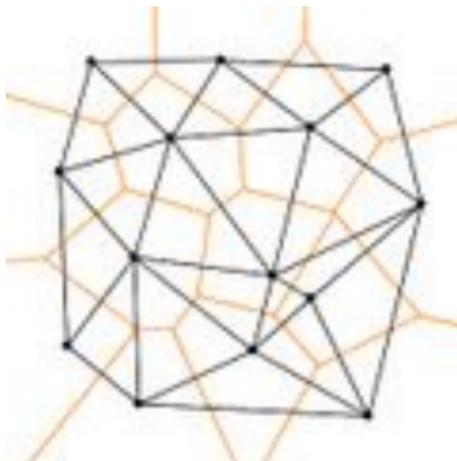
## Eigenschaften des Delaunay Mosaiks

- ▶ interpretierbar als dualer Graph eines Voronoi Mosaiks
- ▶ falls von jedem Knoten im Voronoi Mosaik 3 Kanten ausgehen, gilt:

Die Zellen zu 2 Keimpunkten haben gemeinsame Kante im Voronoi Mosaik

⇔ Die 2 Keimpunkte sind verbunden im Delaunay Mosaik

Abbildung: Dualer Graph



# Inhalt

Einführung

Deterministische Mosaik

**Zufällige Mosaik**

Mathematische Analyse

Statistik

Schluss

## Zufällige Mosaik

2 verschiedene Sichtweisen:

1. zufällige abgeschlossene Mengen
2. Punktprozess konvexer Polygone

# Zufälliges Mosaik

## Definition

- ▶ Sei
  - ▶  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  Wahrscheinlichkeitsraum
  - ▶  $\mathbb{T}$  Klasse aller Mosaik im  $\mathbb{R}^2$
  - ▶  $\theta_K = \{\theta \in \mathbb{T} : E_\theta \cap K \neq \emptyset\}$  für  $K \subset \mathbb{R}^2$  kompakt
  - ▶  $\mathcal{T} = \sigma(\{\theta_K, K \subset \mathbb{R}^2 \text{ kompakt}\})$
  
- ▶ Eine messbare Abbildung  $\Theta : \Omega \rightarrow \mathbb{T}$  vom Messraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  in den Messraum  $(\mathbb{T}, \mathcal{T})$  heißt dann *zufälliges Mosaik*
  
- ▶  $\Theta$  induziert Wahrscheinlichkeitsmaß  $P(A) = P(\Theta \in A)$ , wobei  $A \in \mathcal{T}$

## Stationarität und Isotropie

### Definition

Sei  $\Theta$  ein zufälliges Mosaik im  $\mathbb{R}^2$ .

- ▶  $\Theta$  heißt *stationär*, falls  $\forall x \in \mathbb{R}^2$  gilt  $\Theta + x = \{p + x : p \in \Theta\} \stackrel{d}{=} \Theta$
- ▶  $\Theta$  heißt *isotrop*, falls seine Verteilung invariant gegenüber Drehungen um den Ursprung ist
- ▶  $\Theta$  heißt *bewegungsinvariant*, wenn es stationär und isotrop ist

## Zufälliger Punktprozess

### Definition

- Seien  $S_1, S_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  ZV über  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , dann heißt  $\{S_n\}$  *zufälliger Punktprozess*, falls:

$$\#\{n : S_n \in B\} < \infty \quad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2) \quad (3)$$

- wenn außerdem mit Wahrscheinlichkeit 1,

$$S_i \neq S_j \quad \forall i, j \geq 0 \text{ mit } i \neq j \quad (4)$$

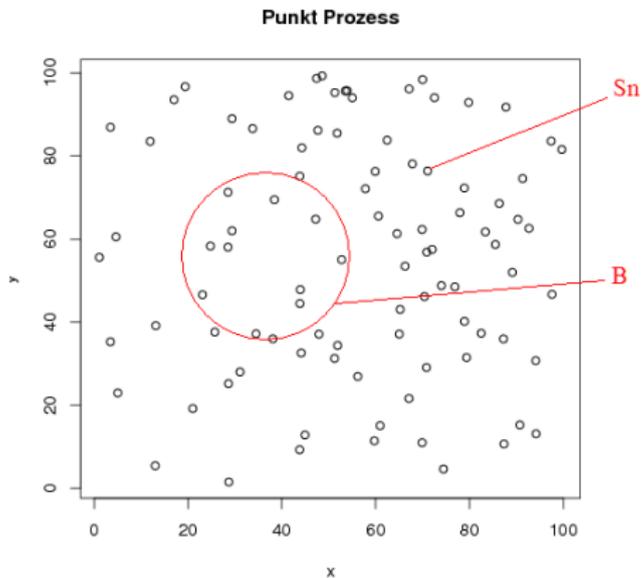
dann heißt  $\{S_n\}$  *einfacher* zufälliger Punktprozess.

$$N_B = \#\{n : S_n \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \quad (5)$$

ist zufälliges Zählmaß

# Anschaulich

## Abbildung: Zufälliger Punktprozess



## Homogener Poisson Prozess

### Definition

$\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$  heißt *homogener Poisson Prozess* im  $\mathbb{R}^2$  mit Intensität  $\lambda \in (0, \infty)$ , falls

1.  $N_{B_1}, N_{B_2}, \dots$  unabhängig  $\forall B_j \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2), B_j \cap B_k = \emptyset, j \neq k$
2.  $N_B \sim \text{Poi}(\lambda \nu_2(B)) \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$

# Geraden Mosaik

## Anschaulich

Werfe zufällig Geraden in die Ebene  $\rightsquigarrow$  Mosaik

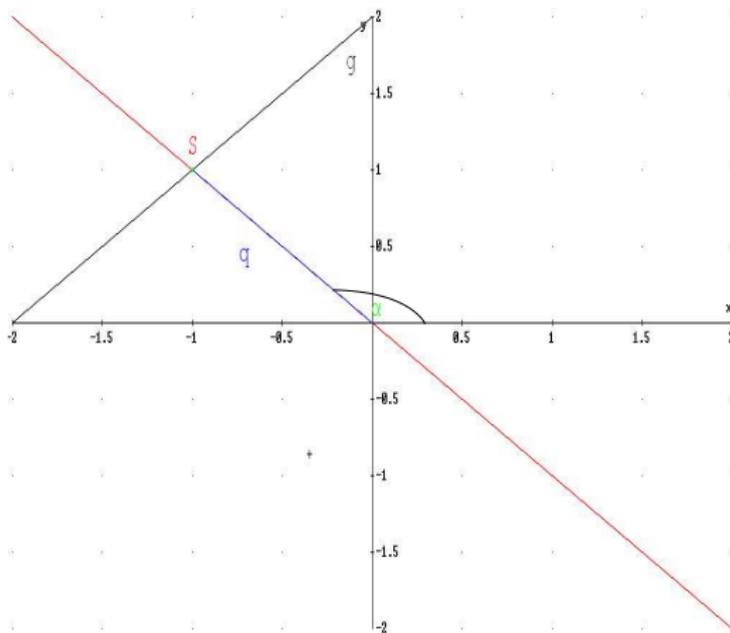
## Genauer

- ▶ Geraden-Prozess  $\Psi$  im  $\mathbb{R}^2$
- ▶  $E_\theta$  sei Vereinigung aller Geraden von  $\Psi$
- ▶  $E_\theta$  ist Kantenmenge eines zufälligen Mosaiks  $\Theta$

## Geraden Prozess

Ordne jeder Geraden  $g$  im  $\mathbb{R}^2$  Parameter  $\alpha \in [0, \pi)$  und  $q \in \mathbb{R}$  zu

**Abbildung:** Parametrisierung einer Geraden



## Geraden Prozess

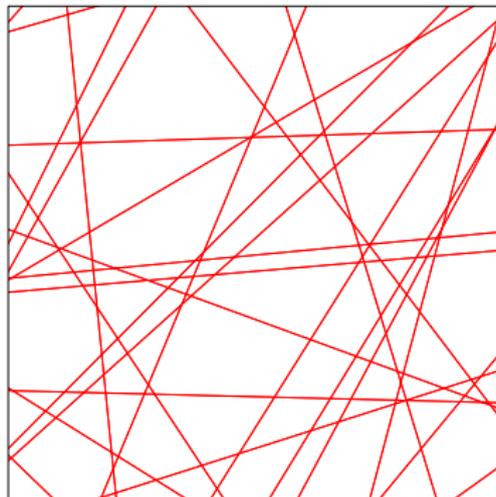
### Definition

- ▶ Sei  $\Phi$  ein Punktprozess im Parameterraum  $C = [0, \pi) \times \mathbb{R}$
- ▶  $g(\alpha, q)$  sei Gerade mit Parametern  $\alpha$  und  $q$
- ▶ die zufällige Geradenmenge  $\Psi = \{g(\alpha, q) : (\alpha, q) \in \Phi\}$  heißt *ebener Geraden-Prozess*
- ▶ falls  $\Psi$  stationär
  - ▶ Intensität  $L_A$  = erwartete Gesamtlänge der Geraden pro Einheitsfläche
  - ▶ entspr. zufälliges Mosaik stationär

## Poisson Geraden Prozess

Punktprozess  $\Phi$  ist Poisson Prozess auf  $[0, \pi) \times \mathbb{R}$

Abbildung: Poisson Geraden Mosaik

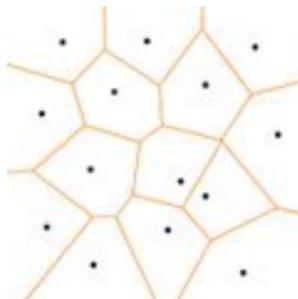


# Voronoi Mosaik

## Konstruktion

- ▶ Sei  $\Phi$  Punktprozess im  $\mathbb{R}^2$
- ▶ erzeuge wie im determ. Fall Voronoi-Mosaik  $V(\Phi)$
- ▶ falls  $\Phi$  stationär mit Intensität  $\lambda \in (0, \infty)$ 
  - ⇒ fast sicher alle entstehenden Polygone beschränkt
  - ⇒  $V(\Phi)$  Voronoi-Mosaik
- ▶  $\Phi$  stationär bzw. isotrop
  - ⇒  $V(\Phi)$  stationär bzw. isotrop

Abbildung: Voronoi Mosaik

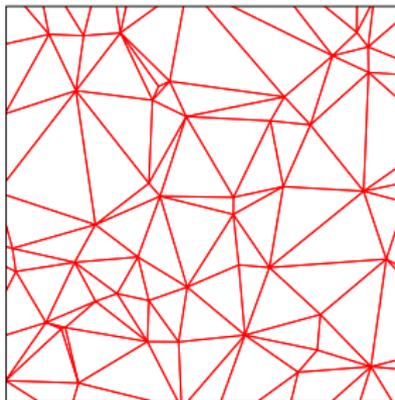


# Delaunay Mosaik

## Konstruktion

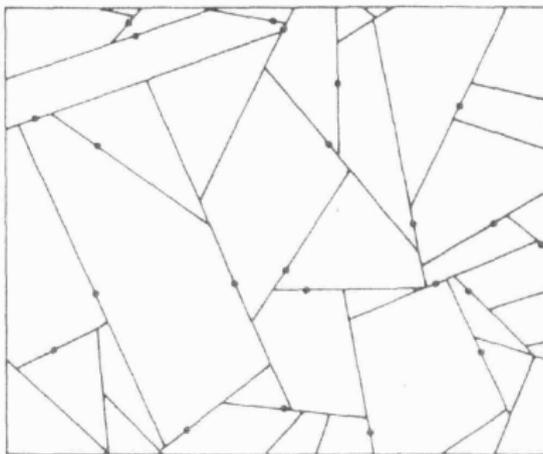
- ▶ Betrachte zufälliges Voronoi Mosaik  $V(\Phi)$
  - ▶ Wenn in  $V(\Phi)$  fast sicher jeder Knoten von genau 3 Zellen berührt wird
- ⇒ eindeutiges Delaunay Mosaik  $D(\Phi)$

Abbildung: Delaunay Mosaik



# Crack Mosaik

## Abbildung: Crack Mosaik



**Figure 10.7** A realization of a crack tessellation relative to a stationary Poisson point process. The directions of growth are uniformly and independently distributed

# Inhalt

Einführung

Deterministische Mosaik

Zufällige Mosaik

**Mathematische Analyse**

Statistik

Schluss

## Parameterbeschreibung

Das ebene Mosaik  $\Theta$  analysieren wir durch die Kantenmenge  $E_\Theta$  mit Intensität  $L_A$  und drei Punktprozesse :

- ▶ Punktprozess der Ecken  $\alpha_0(\Theta)$  mit Intensität  $\lambda_0$
- ▶ Punktprozess der Kantenmittelpunkte  $\alpha_1(\Theta)$  mit Intensität  $\lambda_1$
- ▶ Punktprozess der Zellschwerpunkte  $\alpha_2(\Theta)$  mit Intensität  $\lambda_2$

$\alpha_k(\Theta)$  kann auf unterschiedliche Weise markiert werden

## Markierter Punktprozess

### Definition

Zusätzliche Informationen im Punkt  $S_n$  :

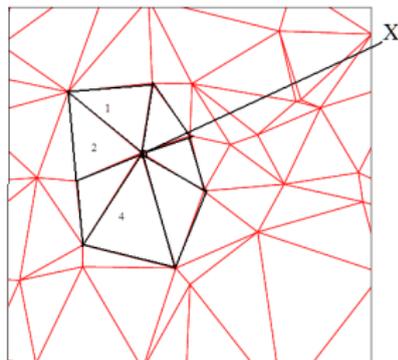
- ▶ Folge  $\{L_n\}$  von ZV  $L_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  über  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ,  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ —messbar
- ▶ Die Folge  $\{(S_n, L_n)\}$  heißt dann ein zufälliger *markierter Punktprozess*
- ▶  $L_n$ —Marke

## Marken der Ecken

Marken für  $x \in \alpha_0(\Theta)$

- ▶  $n_{o2}(x) := \#\{p \in \Theta : x \in \bar{p}\}$ 
  - ▶ Anzahl von Polygonen die  $x$  berühren oder der Kanten ausgehend von  $x$
- ▶  $l_0(x)$  die gesamte Kantenlänge aus  $x$

Abbildung: Markierung der Ecken

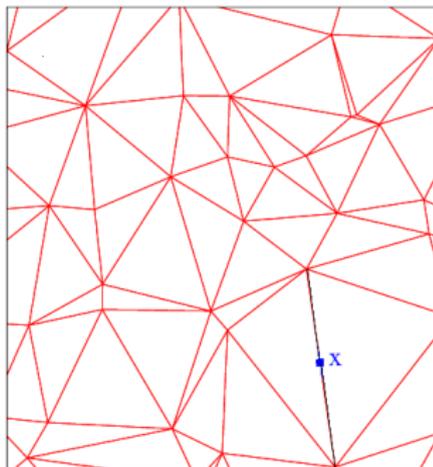


## Marken der Kantenmittelpunkte

Marke für  $x \in \alpha_1(\Theta)$

- ▶  $l_1(x)$  Länge der Kante durch  $x$

Abbildung: Markierung der Kantenmittelpunkte

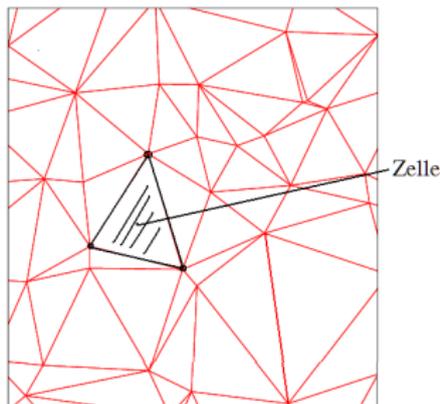


## Marken der Zellschwerpunkte

Marken für  $x \in \alpha_2(\Theta)$

- ▶  $n_{20}(x)$  Anzahl der Knoten, die  $x$  umfassen
- ▶  $l_2(x) := \nu_1(\partial p)$  die gesamte Kantenlänge des Polygons  $p$ , das  $x$  umfasst
- ▶  $a_2 := \nu_2(p)$  die Fläche der Zelle  $p$ , die  $x$  umfasst

**Abbildung:** Markierung des Zellschwerpunkts



## Palm-Marken-Verteilung und typische Marke

### Palm-Marken-Verteilung

- ▶ Sei  $\{(S_n, L_n)\}$  stationärer markierter Punktprozess mit Intensität  $\lambda$

$$\mathcal{P}(L) = \frac{\mathbb{E}\#\{i : S_i \in [0, 1]^2, L_i \in L\}}{\lambda}$$



$$= \frac{\mathbb{E}\#\{i : S_i \in [0, 1]^2, L_i \in L\}}{\mathbb{E}\#\{i : S_i \in [0, 1]^2\}} \quad \forall L \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (6)$$

ist Palm-Marken-Verteilung von  $L$

- ▶ Eine Zufallsvariable  $L^*$  mit Verteilung  $\mathcal{P}$  heißt *typische Marke*

# Ergodizität

## Definition

Sei  $(N, \mathcal{N})$  messbarer Raum, wobei :

- ▶  $N$  ist Familie aller lokal endlicher einfacher  $\varphi \subset \mathbb{R}^2$
- ▶ ein  $\varphi \in N$  kann man als Maß auf  $\mathbb{R}^2$  ansehen, so dass:

$$\varphi(B) = \# \text{ Punkte von } \varphi \text{ in } B, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

- ▶  $\mathcal{N}$  sei dann die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $N$ , für die alle Abb.  $\varphi \rightarrow \varphi(B)$  messbar sind  $\forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$

# Ergodizität

## Definition

- ▶ Ein  $Y \in \mathcal{N}$  heißt *invariant*, falls

$$P(Y \setminus Y_x \cup Y_x \setminus Y) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad (7)$$

wobei  $Y_x = Y + x$

- ▶ Eine stationäre Verteilung  $P$  auf  $(N, \mathcal{N})$  heißt dann *ergodisch* falls,

$$P(Y) \in \{0, 1\} \quad \forall \text{ invarianten } Y \in \mathcal{N} \quad (8)$$

- ▶ Beispiel: Ein stationärer Poisson Prozess ist ergodisch

## Gesuchte Charakteristika

- ▶  $\bar{n}_{02}$  Erwartungswert der Anzahl der Kanten, die von den „typischen“ Ecken ausgehen
- ▶  $\bar{l}_0$  Erwartungswert der gesamten Kantenlänge durch die „typischen“ Ecken
- ▶  $\bar{l}_1$  Erwartungswert der Länge der „typischen“ Kanten
- ▶  $\bar{n}_{20}, \bar{l}_2, \bar{a}_2$  analog

## Erwartungswerte

### Allgemein

Sei  $\{(S_n, L_n)\}$  ergodisch, dann gilt:

$$\mathbb{E}(L^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\{i : S_i \in W_n\}} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_i \in W_n\}} L_i \quad \text{f.s.} \quad (9)$$

wobei  $L^*$  die typische Marke von  $\{(S_n, L_n)\}$  ist und  $W_n = B(0, n)$

### Beispiel

$$\bar{a}_2 = \mathbb{E}\nu_2(\Xi^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\{i : \Xi_i \subset W_n\}} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\Xi_i \subset W_n\}} \nu_2(\Xi_i) \quad \text{f.s.} \quad (10)$$

wobei  $\Xi^*$  die typische Zelle und  $\nu_2(\Xi^*)$  die Fläche der typischen Zelle ist

## Theorem 1

$$\bar{n}_{02} = 2 + \frac{2\lambda_2}{\lambda_0} \quad (11)$$

$$\bar{n}_{20} = 2 + \frac{2\lambda_0}{\lambda_2} \quad (12)$$

$$\bar{l}_0 = \frac{2L_A}{\lambda_0} \quad (13)$$

$$\bar{l}_2 = \frac{2L_A}{\lambda_2} \quad (14)$$

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{\lambda_2} \quad (15)$$

$$\bar{l}_1 = \frac{L_A}{\lambda_0 + \lambda_2} = \frac{L_A}{\lambda_1} \quad (16)$$

## Korollar 1

$$\frac{1}{\bar{n}_{02}} + \frac{1}{\bar{n}_{20}} = \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$\bar{l}_0 = \bar{n}_{02} \bar{l}_1 \quad (18)$$

$$\bar{l}_2 = \bar{n}_{20} \bar{l}_1 \quad (19)$$

$$\bar{n}_{02} \geq 3$$

$$\bar{n}_{20} \leq 6$$

## Erklärung

Jede Ecke liegt in mindestens 3 Zellen, jede Zelle hat mindestens 3 Ecken

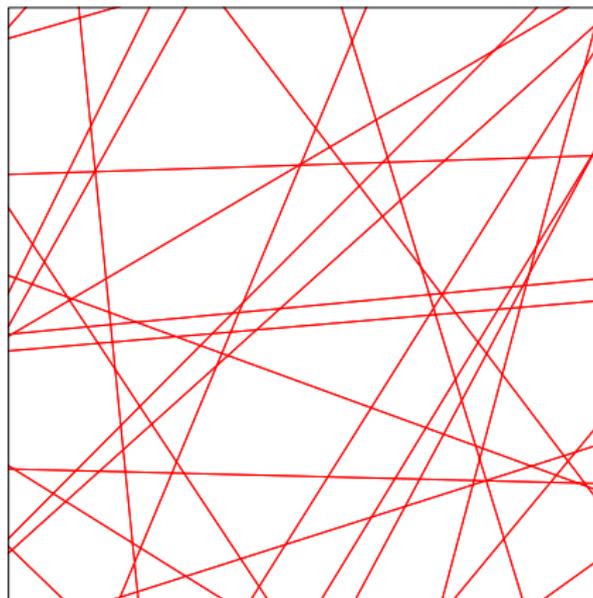
$$\implies n_{02} \geq 3 \implies \bar{n}_{02} \geq 3 \stackrel{(17)}{\implies} \bar{n}_{20} \leq 6$$

## Bemerkung

Alle uns interessierenden Erwartungswerte können durch die 3 Parameter  $\lambda_0$ ,  $\lambda_2$  und  $L_A$  berechnet werden.

# Poisson Geraden Mosaik (Crofton Mosaik)

Abbildung: Poisson Geraden Mosaik

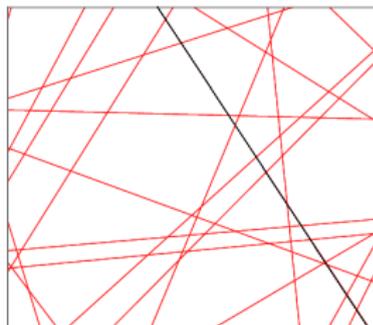


## Poisson Geraden Mosaik (Crofton Mosaik)

- ▶  $\Psi$  bewegungsinvarianter *Poisson Geraden Prozess* mit Intensität  $L_A$
- ▶  $g$  ein feste (Test-)Gerade in  $\Psi$
- ▶  $\rho$  Intensität des Punktprozesses der Schnittpunkte von  $g$  und  $\Psi$

⇒ Mit Wkt.1 gibt es durch jeden Schnittpunkt nur 2 Geraden, d.h.  $n_{o2} \equiv 4$  f.s.

Poisson Gerade Mosaik mit Testgerade



— Testgerade g

## Poisson Geraden Mosaik (Crofton Mosaik)

- ▶ Man kann zeigen:

$$\rho = \frac{2L_A}{\pi} \quad \text{und} \quad \bar{l}_1 = \frac{1}{\rho} \quad (20)$$

- ▶  $n_{02} \equiv 4$  f.s.

$$\stackrel{\text{Theorem 1}}{\implies} \lambda_0 = \lambda_2 = \frac{\pi\rho^2}{4} \quad (21)$$

- ▶ d.h. alle Parameter hängen nur von  $\rho$  ab
- ▶ somit hängen auch alle Mittelwerte nur von  $\rho$  ab, z.B.

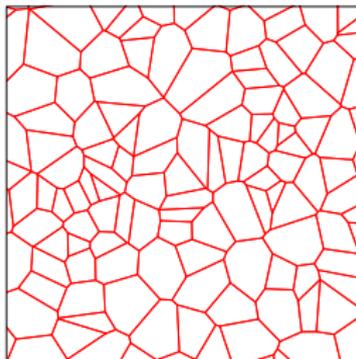
$$\bar{a}_2 = \frac{4}{\pi\rho^2} \quad \bar{l}_2 = \frac{4}{\rho} \quad (22)$$

## Poisson Voronoi Mosaik

- ▶  $\Phi$  stationärer Poisson Prozess mit Intensität  $\tau$
- ▶  $V(\Phi)$  zugeh. Voronoi Mosaik

⇒ Mit Wkt. 1 ist  $V(\Phi)$  im *gewöhnlichen Gleichgewichtszustand*, d.h.  $n_{02} \equiv 3$  f.s

Abbildung: Poisson-Voronoi-Mosaik



## Poisson Voronoi Mosaik

- ▶  $n_{02} \equiv 3$  f.s

$$\xrightarrow{\text{Theorem 1}} \lambda_1 = \frac{3\lambda_0}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{2} \quad (23)$$

- ▶ Nach Konstruktion des Voronoi Mosaiks:  $\lambda_2 = \tau$

$$\implies \lambda_0 = 2\tau, \quad \lambda_1 = 3\tau \quad (24)$$

- ▶ Außerdem kann man zeigen:

$$L_A = 2\sqrt{\tau} \quad (25)$$

- ▶ d.h. alle Parameter(und Mittelwerte) hängen nur von  $\tau$  ab

- ▶ z.B.

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{\tau}, \quad \bar{l}_2 = \frac{4}{\sqrt{\tau}} \quad (26)$$

# Inhalt

Einführung

Deterministische Mosaik

Zufällige Mosaik

Mathematische Analyse

**Statistik**

Schluss

# Statistik

- ▶ Betrachte stationäres zufälliges Mosaik  $\Theta$
- ▶ Betrachte Beobachtungsfenster  $W$  mit Flächeninhalt  $A(W)$
- ▶ die Mittelwerte der typischen Zelle können durch die 3 Parameter  $\lambda_0$ ,  $\lambda_2$  und  $L_A$  bestimmt werden

## Ziel

Finde Schätzer für diese Parameter

## Schätzer für $\lambda_0$

- ▶ Erinnerung:  $\lambda_0$  ist Intensität des Punkt Prozesses der Knoten, d.h. erwartete Anzahl von Knoten pro Einheits-Fläche
- ▶ verwende den unverzerrten Schätzer:

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{\# \text{ Knoten in } W}{A(W)}$$

## Schätzer für $\lambda_2$

- ▶ Erinnerung:  $\lambda_2$  ist Intensität des Punkt Prozesses der Schwerpunkte der Zellen
- ▶ d.h. erwartete Anzahl von Zellschwerpunkten pro Einheitsfläche
- ▶ Problem:  $\exists$  Zellen die nicht ganz im Beobachtungsfenster  $W$  liegen

⇒ liegen Zellschwerpunkte in  $W$  oder nicht?

## Fall 1

Sei  $W$  ein Rechteck und die Kanten einer Zelle schneiden  $W$  an je höchstens 2 Stellen. Betrachte:

- ▶  $z(W) = \#$  Zellen die komplett in  $W$  liegen
- ▶  $w(W) = \#$  Zellen die Seiten von  $W$  aber nicht seine Ecken schneiden
- ▶  $u(W) = \#$  Zellen die Ecken von  $W$  enthalten

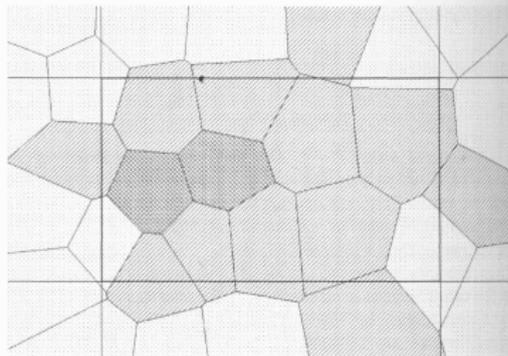
Dann ist  $\hat{\lambda}_2^{(1)} = \frac{z(W) + \frac{1}{2} \cdot w(W) + \frac{1}{4} \cdot u(W)}{A(W)}$  ein unverzerrter Schätzer für  $\lambda_2$

## Interpretation

- ▶ Ebene sei vollständig mit Beobachtungsfenstern der selben Art bedeckt
- ▶ Zellen, die eine Seite des Fensters aber keine Ecke schneiden werden in 2 Fenstern gezählt  $\rightsquigarrow$  Faktor  $\frac{1}{2} \cdot w(W)$
- ▶ die Zellen, die die Ecken des Fensters schneiden werden in 4 Fenstern gezählt  $\rightsquigarrow$  Faktor  $\frac{1}{4} \cdot u(W)$

## Abbildung: Interpretation des Schätzers $\hat{\lambda}_2^{(1)}$

324 *Single-phase polyhedral microstructures*



**Figure 10.6** Part of a planar tessellation. To illustrate the estimator (10.7), the edges of the measurement field have been extended and the two types of cell to be counted have been shaded differently. In this case  $f = 2$  and  $e = 12$ . By using the estimator (10.7) we obtain  $\tilde{N}_A = 9/A(W)$ .

## Fall 2

- ▶  $\Theta$  sei im gewöhnlichen Gleichgewichtszustand
- ▶ d.h. von jedem Eckpunkt gehen drei Kanten aus
- ▶ nach Theorem 1 gilt dann:  $2\lambda_2 = \lambda_0$

Dann ist  $\hat{\lambda}_2^{(2)} = \frac{\hat{\lambda}_0}{2}$  ein unverzerrter Schätzer für  $\lambda_2$

Hier gilt:  $\hat{\lambda}_2^{(1)} = \hat{\lambda}_2^{(2)}$

## Schätzer für $L_A$

- ▶ Erinnerung:  $L_A$  ist erwartete gesamte Kantenlänge pro Einheitsfläche
- ▶ Sei  $L(E_\theta \cap W)$  gesamte Kantenlänge von  $\Theta$  im Fenster  $W$
- ▶ messbar durch Bildanalyse

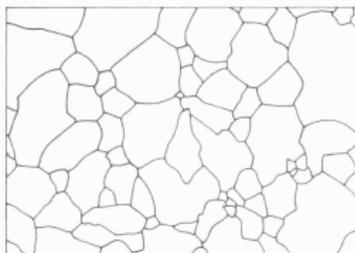
Dann ist  $\hat{L}_A = \frac{L(E_\theta \cap W)}{A(W)}$  unverzerrter Schätzer für  $L_A$

## Beispiel: Austenit Kern Grenzen in Stahl

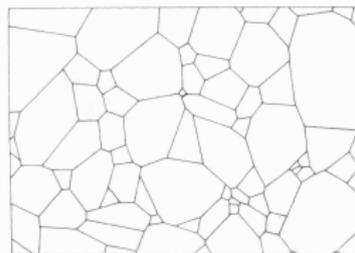
Betrachte ebenen Schnitt durch Stahlprobe u. zugehöriges Mosaik

Abbildung: Beispiel Austenit Kern Grenzen

STATISTICS FOR PLANAR STATIONARY TESSELLATIONS



a)



b)

2

## Daten

- ▶ # Knoten in  $W = 124$
- ▶  $L(E_\Theta \cap W) =$  totale Kantenlänge in  $W = 172,2$
- ▶  $A(W) = 179,71$

## Schätzer

Damit kann man nun die verschiedenen Schätzer bestimmen:

- ▶  $\hat{\lambda}_0 = \frac{124}{179,71} = 0,69$
- ▶ da  $\bar{n}_{02} = 3 : \hat{\lambda}_2 = \frac{\hat{\lambda}_0}{2} = 0,345$
- ▶  $\hat{L}_A = \frac{172,2}{179,71} = 0,96$

$$\Rightarrow \text{z.B. } \hat{l}_1 = \frac{\hat{L}_A}{\hat{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_2} = 0,93$$

# Inhalt

Einführung

Deterministische Mosaik

Zufällige Mosaik

Mathematische Analyse

Statistik

Schluss

# Ausblick

## Vertiefende Vorträge

- ▶ Iterierte Mosaik
- ▶ Voronoi-und Johnson-Mehl Mosaik
- ▶ Crack-STIT Mosaik

# Quellen

## Literatur

- ▶ Stochastic Geometry and its Applications; D.Stoyan,W.S.Kendell,J.Mecke
- ▶ Statistical Analysis of Microstructures in Material Sciences; Joachim Ohser, Frank Mücklich
- ▶ Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Stochastische Geometrie; R.V.Ambartzumjan,J.Mecke,D.Stoyan
- ▶ Skript Räumliche Statistik; V.Schmidt

## Quellen

### Bilder

- ▶ Minkowski Funktionale für konvexe Mengen und Kenngrößen für zufällige Mosaike; V.Weiß
- ▶ Haggett et al. 1977: Locational Analysis in Human Geography
- ▶ <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7a/Thiessen-Polygon.png>
- ▶ [http://www.geovista.psu.edu/sites/geocomp99/Gc99/023/gc023\\_3f.gif](http://www.geovista.psu.edu/sites/geocomp99/Gc99/023/gc023_3f.gif)
- ▶ <http://www.geoinformatik.uni-rostock.de/einzel.asp?ID=477>
- ▶ [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/08/Coloured\\_Voronoi\\_2D.png](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/08/Coloured_Voronoi_2D.png)