Prof. Dr. Volker Schmidt SS 2008
Dipl.-Math. oec. Sebastian Lück 17.04.2008

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 1

(Abgabe: Mittwoch, 23.04.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Sei $\{X_t: t \geq 0\}$ ein reellwertiger stochastischer Prozess. Zeige:

(a) Wenn $\{X_t: t \geq 0\}$ stationäre Zuwächse hat und die Funktion $f(t) = \mathbb{E}X_t$ stetig in t ist, dann ist $f(t)$ linear in t, d. h. $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass$f(t) = \alpha + \beta t$. (2)

(b) Wenn $\{X_t: t \geq 0\}$ stationäre und unabhängige Zuwächse hat und die Funktion $g(t) = \mathrm{Var}(X_t - X_0)$ stetig in t ist, dann gilt: $\exists\ \sigma^2 > 0$, so dass $\mathrm{Var}(X_{s+t} - X_s) = \sigma^2 t\ \forall s, t \geq 0$. (2)

Aufgabe 2

Zeige: Ein Prozess $\{X_t: t \geq 0\}$ mit unabhängigen Zuwächsen hat bereits dann stationäre Zuwächse, wenn für alle $t \geq 0$ die Verteilung der Zufallsvariablen $X_{t+s} - X_s$ unabhängig von s ist. (3)

Aufgabe 3

Für $t \geq 0$ sei $X_t = Y\cos(\theta t) + Z\sin(\theta t)$, wobei Y und Z unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind. Sei ferner $\tilde{X}_t = R\cos(\theta t + \Psi)$ für zwei unabhängige Zufallsvariablen R und Ψ. Finde Verteilungen für R und Ψ, so dass $\{X_t: t \geq 0\}$ und $\{\tilde{X}_t: t \geq 0\}$ dieselben endlichdimensionalen Verteilungen haben. (4)

Aufgabe 4

Sei $\{P_t: t \geq 0\}$ eine Halbgruppe von Wahrscheinlichkeitskernen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, d.h. für alle $t, s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{B}(R)$ gilt

(i) $x \mapsto P_t(x, A)$ ist messbar,

(ii) $A \mapsto P_t(x, A)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

(iii) $P_{s+t}(x, A) = \int_{\mathbb{R}} P_t(y, A) P_s(x, dy)$.

Sei ferner μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zeige, dass ein stochastischer Prozess existiert, der für $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ die endlichdimensionalen Verteilungen

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = \int_{\mathbb{R}} \int_{B_1} \int_{B_2} \cdots \int_{B_n} P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \ldots P_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) P_{t_1}(x_0, dx_1) \mu(dx_0)$$

besitzt. (4)

Hinweis: Aktuelle Informationen zur Vorlesungen sind unter

http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stochastik/lehre/ss08/wt.html

zu finden. Dort stehen u. a. auch die Übungsblätter zum Download bereit. Zur Teilnahme an den Übungen ist eine Anmeldung im SLC erforderlich. Die Lösungen der Übungsblätter können zu zweit abgegeben werden. Bitte die Namen **deutlich** schreiben!