Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Sebastian Lück

SS 2008
23.04.2008

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 2

(Abgabe: Mittwoch, 07.05.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Die Ankunftszeiten von Bananendampfern im Hamburger Hafen seien durch einen Erneuerungsprozess $\{N_t : \ t \geq 0\}$ gegeben. Für die i.i.d. Zwischenankunftszeiten $T_1, T_2, \ldots$ gelte $0 < \mathbb{E}\, T_1 < \infty$. Jeder Dampfer transportiert eine zufällige Anzahl $Z_i \geq 0$ von Bananen, wobei die Folge $Z_1, Z_2, \ldots$ i.i.d. sei mit $\mathbb{E}\, Z_1 < \infty$. Berechne die langfristige Bananenankunftsrate

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N_t} Z_i.$$

(2)

Aufgabe 2

Sei $\{N_t : t \geq 0\}$ ein Erneuerungsprozess mit Zwischenankunftszeiten $T_1, T_2 \ldots$. Berechne $P(N_t = n)$ für den Fall dass $T_i \sim Exp(\lambda)$ bzw. $T_i \sim \Gamma(\lambda, b)$ für $\lambda, b > 0$. (3)

Aufgabe 3

Sei $\{N_t : t \geq 0\}$ ein Erneuerungsprozess. Zeige: Es gilt $P(N_t < \infty) = 1$ für alle $t \geq 0$ genau dann, wenn $\mathbb{E}\, T_1 > 0$. (4)

Aufgabe 4

Die Zufallsvariablen $Z_1, Z_2, \ldots$ seien i.i.d. mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sigma^2 > 0$. Sei $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, und die Zufallsvariable M sei eine Stoppzeit bezüglich $\{Z_1, Z_2, \ldots\}$ mit $\mathbb{E}\, M < \infty$, d.h. $\{M \leq j\} \in \sigma\{Z_1, \ldots, Z_j\}$ $\forall j \in \mathbb{N}$, wobei $\sigma\{Z_1, \ldots, Z_j\}$ die von $Z_1, \ldots, Z_j$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet. Damit ist insbesondere $1\!\!1_{\{M \leq j\}}$ unabhängig von $\{Z_{j+1}, Z_{j+2}, \ldots\}$ $\forall j \in \mathbb{N}$. Zeige, dass

$$\operatorname{Var} S_M = \sigma^2 \mathbb{E}\, M.$$

(4)

Aufgabe 5

Die Zwischenankunftszeiten $T_1, T_2, \ldots$ seien unabhängig und identisch $\mathrm{Erl}(m, \lambda)$-verteilt, $\lambda > 0, m \in \mathbb{N}$. Bestimme für jedes m die Erneuerungsfunktion $H(t)$ des zugehörigen Erneuerungsprozesses $\{N_t\}$ und gib eine explizite Formel für den Fall $m = 1$ an. (4)