Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Sebastian Lück

SS 2008
07.05.2008

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 3

(Abgabe: Mittwoch, 28.05.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Gegeben sei ein zusammengesetzter Poisson-Prozess $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$.
Sei $\hat{g}_{N_t}(s) = \mathbb{E}(s^{N_t})$, $s \in (0,1)$, die erzeugende Funktion von N_t, $\hat{l}_U(s) = \mathbb{E}(e^{-sU})$ die Laplace-Transformierte von U_i $\forall i$ und $\hat{l}_{X_t}(s)$ die Laplace-Transformierte von X_t. Zeige:

$$\hat{l}_{X_t}(s) = \hat{g}_{N_t}(\hat{l}_U(s)), s \geq 0$$

(4)

Aufgabe 2

Gegeben sei ein zusammengesetzter Poisson-Prozess $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$ mit
$U_i \sim Exp(\gamma)$ $\forall i$, wobei die Intensität von $\{N_t\}$ durch λ gegeben sei. Zeige, dass für die Laplace-Transformierte $\hat{l}_{X_t}(s)$ von X_t gilt:

$$\hat{l}_{X_t}(s) = e^{-\frac{\lambda t s}{\gamma + s}}$$

(4)

Aufgabe 3

Seien $\{N_t^{(1)}\}$ und $\{N_t^{(2)}\}$ unabhängige Poisson-Prozesse mit den Intensitäten λ_1 bzw. λ_2. Die Unabhängigkeit soll in diesem Fall bedeuten, dass die Folgen $T_1^{(1)}, T_2^{(1)} \ldots$ und $T_1^{(2)}, T_2^{(2)} \ldots$ unabhängig sind. Zeige, dass $\{N_t\} = \{N_t^{(1)} + N_t^{(2)}\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda_1 + \lambda_2$ ist. (3)

Aufgabe 4

Führe die ersten beiden Teile des Beweises von Theorem 2.9, d.h. zeige (a)$\Rightarrow$(b) und (b)$\Rightarrow$(c), wobei die Aussagen $(a), (b)$ und (c) für einen Zählprozess $\{N_t,\ t > 0\}$ wie folgt lauten:

(a) $\{N_t\}$ ist ein Poisson-Prozess mit Intensität λ.

(b) Für beliebige $t > 0$ und $n = 1, 2, \ldots$ gilt $N_t \sim Poi(\lambda)$ und

$$f_{S_1,\ldots,S_n}(t_1, \ldots, t_n | N_t = n) = \frac{n!}{t^n} \mathbb{I}_{\{0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq t\}},$$

d.h. $(S_1, \ldots, S_n)$ hat unter der Bedingung $N_t = n$ die gleiche Verteilung wie die Ordnungsstatistik von n unabhängigen auf $[0, t]$ gleichverteilten Zufallsvariablen.

(c) $\{N_t\}$ hat unabhängige Zuwächse mit $\mathbb{E}\, N_1 = \lambda$ und für beliebige $t > 0$ und $n = 1, 2, \ldots$ hat $(S_1, \ldots, S_n)$ unter der Bedingung $N_t = n$ die gleiche Verteilung wie die Ordnungsstatistik von n unabhängigen auf $[0, t]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. (4)

Aufgabe 5 (Wartezeitenparadoxon)

Für einen Erneuerungsprozess $\{N_t\}$ heißt

(i) $T(t) = S_{N_t+1} - t$ die Exzesszeit,

(ii) $C(t) = t - S_{N_t}$ die aktuelle Lebenszeit und

(iii) $D(t) = T(t) + C(t) = T_{N_t+1}$ die Lebensdauer zum Zeitpunkt $t > 0$.

Sei nun $\{N_t\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ.

(a) Berechne die Verteilung der Exzesszeit $T(t)$.

(b) Zeige, dass die Verteilung der aktuellen Lebenszeit durch $P(C(t) = t) = e^{-\lambda t}$ und die Dichte $f_{C(t)}(s) = \lambda e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{\{s \leq t\}}$ gegeben ist.

(c) Zeige, dass $P(D(t) \leq x) = (1 - (1 + \lambda \min\{t, x\}) e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$.

(d) Um $\mathbb{E}\, T(t)$ zu bestimmen, könnte man wie folgt argumentieren: Im Mittel liegt t in der Mitte des umgebenden Zwischenankunftsintervalls (S_{N_t}, S_{N_t+1}). Das bedeutet $\mathbb{E}\, T(t) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(S_{N_t+1} - S_{N_t}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\, T_{N_t+1} = \frac{1}{2\lambda}$. In Anbetracht des Ergebnisses aus Teil (a) kann dieses Argument nicht stimmen. Wo liegt der Fehler in der Argumentation? (7)