Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Sebastian Lück

SS 2008
28.05.2008

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 4

(Abgabe: Mittwoch, 11.06.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Sei $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$ und Übergangsmatrix $\mathbf{P} = (p_{ij})$, wobei $p_{12} = p_{23} = p_{31} = 1$ gelte. Die Anfangsverteilung sei durch $\alpha = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ gegeben.

(a) Zeige, dass die Folge $Y_n = 1 - 1\!\!1(X_n = 1)$ keine Markov-Kette beschreibt. (2)

(b) Sei $Y_n = X_{2n}, n \geq 0$. Zeige, dass die Folge $\{Y_n\}$ eine Markov-Kette ist und bestimme die zugehörige Übergangsmatrix. (3)

Aufgabe 2

Zeige, dass ein stochastischer Prozess $\{X_t : t \geq 0\}$ mit Werten in einem höchstens abzählbar unendlichen Zustandsraum E genau dann ein Markov-Prozess ist, wenn es eine Übergangsfunktion $\{P(h)\}_{h\geq 0}$ gibt, so dass für alle $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ und $i_0, i_1, \ldots, i_n \in E$

$$\begin{aligned} &P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = i_1, X_0 = i_0) \\ &= p_{i_{n-1}i_n}(t_n - t_{n-1}) = P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}). \end{aligned}$$

(3)

Aufgabe 3

Sei $\{X_t : t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozess auf dem abzählbar unendlichen Zustandsraum $E = \mathbb{Z}$ mit stationären und unabhängigen Zuwächsen, die von X_0 unabhängig sind. Es gelte ferner $\lim_{h\downarrow 0} P(X_h - X_0 = k) = \delta_{0k}$. Zeige, dass $\{X_t : t \geq 0\}$ ein Markov-Prozess ist.

Beachte: Die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen lauten in diesem Fall $p_{ij}(h_1 + h_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{ik}(h_1)p_{kj}(h_2)\ \forall i, j \in \mathbb{Z},\ h_1, h_2 \geq 0$. (4)

Aufgabe 4

Seien $\lambda, \mu > 0$ und $\{X_t : t \geq 0\}$ ein Markov-Prozess auf dem Zustandsraum $E = \{1, 2\}$ mit Intensitätsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $p_{ij}(h)$ für $i, j \in \{1, 2\}$ als Lösungen der Kolmogorovschen Vorwärtsgleichungen. (3)

bitte wenden

(b) Berechne $\mathbf{Q^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und mit diesem Ergebnis die Matrixexponentialfunktion $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathbf{Q^n}$. (3)

Aufgabe 5

Es sei $\{X_t : t \geq 0\}$ ein Markov-Prozess mit endlichem Zustandsraum E. Sei $\{N_t : t \geq 0\}$ ein von $\{X_t\}$ unabhängiger Poissonprozess mit Intensität λ. Setze $Y_n = X_{S_n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, d. h., Y_n gibt den Zustand des Markov-Prozesses $\{X_t\}$ zum n-ten Sprungzeitpunkt S_n des Poissonprozesses an. Zeige, dass $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Markov-Kette ist und bestimme deren Übergangsmatrix $\mathbf{P}$. (4)