Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Sebastian Lück

SS 2008
11.06.2008

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 5

(Abgabe: Mittwoch, 25.06.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1

(a) Sei $U_1, U_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen auf $(0,1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen und $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion. Die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ von F ist dann definiert als $F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \geq y\}$.
Zeige, dass die Zufallsvariablen $X_1 = F^{-1}(U_1), X_2 = F^{-1}(U_2), \ldots$ unabhängig und gemäß F verteilt sind. (3)

(b) Formuliere einen Algorithmus zur Simulation von Pseudozufallszahlen, die als Realisierungen einer Folge von unabhängigen und exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$ betrachtet werden können. Als Input soll dabei eine Folge von unabhängigen, auf $(0,1]$ gleichverteilten Pseudozufallszahlen dienen. (2)

Aufgabe 2

(a) Schreibe ein Programm zur Simulation eines Markov-Prozesses $\{X_t, t \geq 0\}$ mit Zustandsraum $E = \{1,2,3\}$, mit der Gleichverteilung auf E als Anfangsverteilung und der Intensitätsmatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Führe die Simulation jeweils 1000mal bis zum Zeitpunkt $t_0 = 10.0, 100.0$ bzw. 1000.0 durch. Bestimme dabei die relativen Häufigkeiten der Zustände, die bei Abbruch der Simulation angenommen wurden. Berechne die stationäre Anfangsverteilung α von $\{X_t\}$ und vergleiche die relativen Häufigkeiten damit. (8)

(b) Führe die Simulation 5000mal bis zum Zeitpunkt $t = 1000.0$ aus und visualisiere zu jedem der Zeitpunkte $5.0, 10.0, 15.0, \ldots, 995.0, 1000.0$ die relativen Häufigkeiten der Zustände $1, 2$ und 3 mittels eines Scatterplots. (3)

(c) Teste mit Hilfe eines χ^2-Anpassungstestes zum Niveau 5%, ob zu den in (b) betrachteten Zeitpunkten die Hypothese abgelehnt wird, dass die simulierten Daten gemäß der stationären Anfangsverteilung α verteilt sind und integriere die Testresultate in die Visualisierung aus (b). (3)

Abzugeben ist ein Ausdruck des lesbar kommentierten Programmcodes *und* der (ggf. beispielhaften) Ausgaben. Bevorzugt werden Programme in Java und R. Für die Visualisierungen und die Tests bietet es sich an, R zu verwenden. Lösungen in anderen gebräuchlichen Programmiersprachen werden nach vorheriger Rücksprache auch akzeptiert, **wenn sie kommentiert, strukturiert und lesbar sind.** Die Java-Online-Dokumentation findet man unter folgendem Link:

`http://java.sun.com/j2se/1.4.2/docs/api/index.html`

Pseudozufallszahlen lassen sich in Java mit Hilfe der Klasse `java.util.Random` erzeugen.

Aufgabe 3

Sei $\{X_t : t \geq 0\}$ ein irreduzibler Markov-Prozess auf dem Zustandsraum $E = \{1, \ldots, \ell\}$ mit Intensitätsmatrix Q und stationärer Anfangsverteilung α. Sei $\{\tilde{X}_n, n \in \mathbb{N}\}$ die zugehörige eingebettete Markov-Kette aus dem Simulationsalgorithmus in Kapitel 2.3.4. Zeige, dass $\{\tilde{X}_n, n \in \mathbb{N}\}$ die stationäre Anfangsverteilung

$$\hat{\alpha}_k = \frac{-\alpha_k q_{kk}}{-\sum_{i \in E} \alpha_i q_{ii}}$$

besitzt. Wann gilt $\hat{\alpha} = \alpha$? (3)