Prof. Dr. Volker Schmidt
Dipl.-Math. oec. Sebastian Lück

SS 2008
25.06.2008

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie - Blatt 6

(Abgabe: Mittwoch, 09.07.2008, vor den Übungen)

Aufgabe 1

Sei $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine Borel-messbare Abbildung, so dass die Urbilder von beschränkten Borelmengen beschränkt sind, d.h.,

$$T^{-1}(B) \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d).$$

Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein zufälliges Zählmaß.

(a) Zeige, dass $\{\tilde{N}_B := N_{T^{-1}(B)},\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein zufälliges Zählmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definiert. (2)

(b) Sei zusätzlich $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ poissonsch mit Intensitätsmaß μ. Zeige, dass dann auch $\{\tilde{N}_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ poissonsch ist und bestimme das Intensitätsmaß. (2)

(c) Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein poissonsches Zählmaß. Ist dann für eine Abbildung $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ auch durch $\{N'_B := N_{T(B)}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein poissonsches Zählmaß definiert? Beweise die Aussage bzw. finde ein Gegenbeispiel. (2)

Aufgabe 2

Sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \in (0,\infty)$.

(a) Sei $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern $W_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ mit $\nu_d(W_n) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$. Zeige, dass der erwartungstreue Schätzer

$$\hat{\lambda}_{W_n} = \frac{N_{W_n}}{\nu_d(W_n)}$$

für λ schwach konsistent ist, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda| > \varepsilon) = 0.$$

(2)

(b) Zeige, dass darüber hinaus für jede solche Folge $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Zufallsvariable

$$\sqrt{\frac{\nu_d(W_n)}{\lambda}}(\hat{\lambda}_{W_n} - \lambda)$$

asymptotisch normalverteilt ist. (3)

(c) Für jedes $n \geq 1$ seien die Mengen $L_n, U_n \subset \mathbb{R}^d$ jeweils die Vereinigung von endlich vielen $d-$dimensionalen Würfeln der Seitenlänge $\delta > 0$, die sich nicht überlappen. Ferner erhalte man für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen L_{n+1} und U_{n+1}, indem zu L_n bzw. U_n endlich viele dieser Würfel hinzugefügt werden. Es sei nun $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern, so dass $\nu_d(W_n) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$ und zusätzlich für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$L_n \subset W_n \subset U_n \text{ sowie } \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_d(L_n)}{\nu_d(W_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_d(U_n)}{\nu_d(W_n)} = 1.$$

Zeige, dass dann $\hat{\lambda}_{W_n}$ stark konsistent ist, d.h., mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt $\lim_{n\to\infty} \hat{\lambda}_{W_n} = \lambda$. (3)

Aufgabe 3

Sei $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y-x| \leq r\}$ die d-dimensionale Kugel um den Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ mit Radius $r \geq 0$. Außerdem sei $\{N_B,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda \in (0,\infty)$. Dann heißt die Funktion $H_S : [0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ mit

$$H_S(r) = P(N_{B(o,r)} > 0)$$

die sphärische Kontaktverteilungsfunktion, während die Funktion $D : [0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ mit

$$D(r) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} P(N_{B(o,r)} > 1 \mid N_{B(o,\varepsilon)} > 0)$$

Nächster-Nachbar-Abstands-Verteilungsfunktion genannt wird.
Zeige, dass für jedes $r > 0$

$$H_S(r) = D(r) = 1 - \exp(-\lambda\kappa_d r^d),$$

wobei κ_d das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel ist. (3)

Aufgabe 4

Sei N ein zufälliges Zählmaß im $\mathbb{R}^d$. Der Operator

$$L_N(f) = \mathbb{E}\exp[-\int_{\mathbb{R}^d} f(x)N(dx)]$$

auf der Menge der Borel-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ heisst das Laplace-Funktional von N. Dabei benutzen wir die Schreibweise $N(dx) = N_{dx}$. Man kann zeigen, dass zwei zufällige Zählmaße N und N' genau dann die gleiche Verteilung haben, wenn $L_N(f) = L_{N'}(f)$ für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit kompaktem Träger. Eine Funktion f hat einen kompakten Träger, wenn die Menge $\{x :\ f(x) > 0\}$ in einem Kompaktum enthalten ist.
Zeige, dass ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß μ das Laplace-Funktional

$$L_N(f) = \exp[-\int_{\mathbb{R}^d}(1 - e^{-f(x)})\mu(dx)]$$

hat. (4)