ulm university universität ulm

Stochastische Geometrie und ihre Anwendungen: Perkolation

Björn Fischer | 12. Juli 2010

Inhalt

Inhalt

Perkolation

Perkolation 1:

Biologie, Chemie, Pharmazie: Verfahren zur Extraktion von Pflanzeninhaltsstoffen aus gepulverten Pflanzenteilen durch Kaltextraktion in einer besonders konstruierten Apparatur, dem Perkolator

Perkolation

Perkolation 1:

Biologie, Chemie, Pharmazie: Verfahren zur Extraktion von Pflanzeninhaltsstoffen aus gepulverten Pflanzenteilen durch Kaltextraktion in einer besonders konstruierten Apparatur, dem Perkolator

Perkolation 2:

Bodenkunde: Versickern des Bodenwassers bis zum Grund- oder Stauwasser

Perkolation

Perkolation 1:

Biologie, Chemie, Pharmazie: Verfahren zur Extraktion von Pflanzeninhaltsstoffen aus gepulverten Pflanzenteilen durch Kaltextraktion in einer besonders konstruierten Apparatur, dem Perkolator

Perkolation 2:

Bodenkunde: Versickern des Bodenwassers bis zum Grund- oder Stauwasser

Perkolation 3:

Mathematik: Die Perkolationstheorie beschreibt das Ausbilden von zusammenhängenden Gebieten (Clustern) bei zufallsbedingtem Besetzen von Strukturen (Gittern)

Inhalt

Definitionen

Definition

Ein **Graph** $G = (V, E)$ besteht aus:

1. einer Menge von **Knoten** $V = (v_1, \dots, v_n)$ und
2. einer Menge von **Kanten** $E = (e_1, \dots, e_m)$, wobei jede Kante zwei Knoten verbindet

Definitionen

Definition

Ein **Graph** $G = (V, E)$ besteht aus:

1. einer Menge von **Knoten** $V = (v_1, \ldots, v_n)$ und
2. einer Menge von **Kanten** $E = (e_1, \ldots, e_m)$, wobei jede Kante zwei Knoten verbindet

Definition

Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn jeder Knoten des Graphen von jedem anderen Knoten aus erreicht werden kann, indem man sich sukzessive auf einer Folge von Kanten des Graphen bewegt.

Beispiele

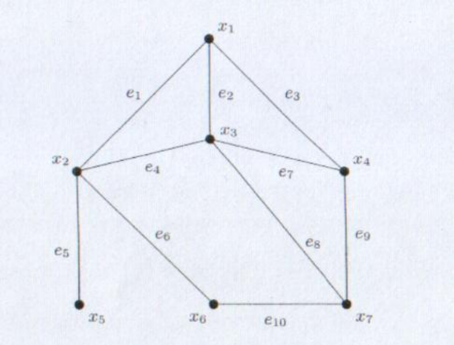

Abbildung: Beispiel eines zusammenhängenden Graphen

Beispiele

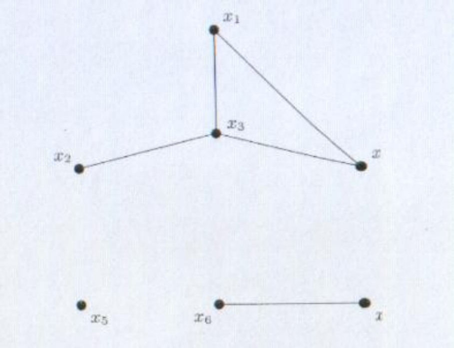

Abbildung: Beispiel eines nicht zusammenhängenden Graphen

Graphen

Folgerung

Nicht jeder Graph ist zusammenhängend, aber jeder Graph kann in **zusammenhängende Komponenten** zerlegt werden.

Inhalt

Kantenperkolation

Definition

Ausgehend von einem Graphen G bleibt jede Kante des Graphen mit **Kantenwahrscheinlichkeit** $p \in [0, 1]$ geöffnet bzw. wird mit Wahrscheinlickeit $(1 - p)$ geschlossen

Das Gitter $\mathbb{Z}^d$

Definition

Das Gitter $\mathbb{Z}^d$ ist ein Graph, bei dem die ganzzahligen Punkte $(i_1, \ldots, i_d)$ aus $\mathbb{R}^d$ die Knoten sind und jeder Knoten mit seinen 2d nächsten Nachbarn durch eine Kante verbunden ist.

Das Gitter $\mathbb{Z}^d$

Definition

Das Gitter $\mathbb{Z}^d$ ist ein Graph, bei dem die ganzzahligen Punkte $(i_1, \ldots, i_d)$ aus $\mathbb{R}^d$ die Knoten sind und jeder Knoten mit seinen 2d nächsten Nachbarn durch eine Kante verbunden ist.

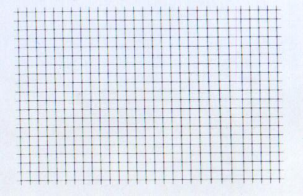

Abbildung: Ausschnitt aus dem Gitter $\mathbb{Z}^2$

Kantenperkolation auf $\mathbb{Z}^2$

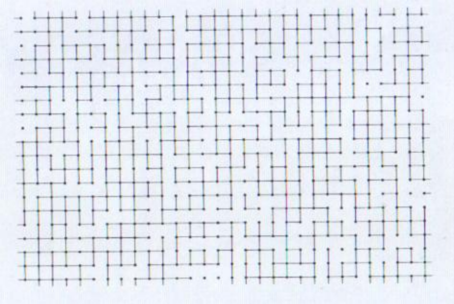

Abbildung: Realisierung eines zufälligen Gitters in $\mathbb{Z}^2$ mit $p = 0,7$

Kantenperkolation auf $\mathbb{Z}^2$

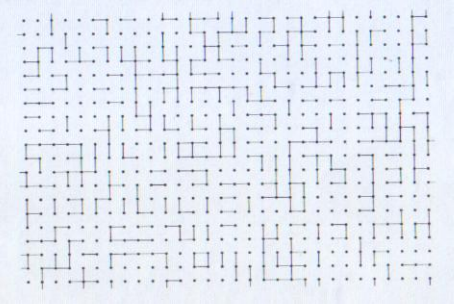

Abbildung: Realisierung eines zufälligen Gitters in $\mathbb{Z}^2$ mit $p = 0,3$

Wahrscheinlichkeit unendlicher zusammenhängender Komponenten

Frage

Wann existiert eine unendliche zusammenhängende Komponente mit Wahrscheinlichkeit 1?

Wahrscheinlichkeit unendlicher zusammenhängender Komponenten

Frage

Wann existiert eine unendliche zusammenhängende Komponente mit Wahrscheinlichkeit 1?

Satz

Sei $\psi(p)$ die Wahscheinlichkeit, dass die Kantenperkolation auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ mit der Kantenwahrscheinlichkeit p zu (mindestens) einer unendlichen zusammenhängenden Komponente führt. Dann existiert für jede Dimension $d \geq 2$ ein **kritischer Wert** $p_c = p_c(d)$, so dass $0 < p_c < 1$ ist und

$$\psi(p) = \begin{cases} 0 & \text{für } p < p_c \\ 1 & \text{für } p > p_c \end{cases}$$

Abschätzung für p_c auf $\mathbb{Z}^2$

Proposition

Für die Kantenperkolation auf dem Gitter $\mathbb{Z}^2$ existiert ein kritischer Wert p_c, für den $\frac{1}{3} \leq p_c \leq \frac{2}{3}$ gilt, so dass die Wahrscheinlichkeit $\psi(p)$ für die Existenz einer unendlichen Zusammenhängenden Komponente

$$\psi(p) = \begin{cases} 0 & \text{für } p < p_c \\ 1 & \text{für } p > p_c \end{cases}$$

beträgt.

Beweis

Lemma 1

Für jedes $p < \frac{1}{3}$ gilt $\psi(p) = 0$

Beweis

Lemma 1

Für jedes $p < \frac{1}{3}$ gilt $\psi(p) = 0$

Lemma 2

Für jedes $p > \frac{2}{3}$ gilt $\psi(p) = 1$

Beweis

Lemma 1

Für jedes $p < \frac{1}{3}$ gilt $\psi(p) = 0$

Lemma 2

Für jedes $p > \frac{2}{3}$ gilt $\psi(p) = 1$

Lemma 3

Für jedes p ist $\psi(p)$ entweder 0 oder 1.

Beweis

Lemma 1

Für jedes $p < \frac{1}{3}$ gilt $\psi(p) = 0$

Lemma 2

Für jedes $p > \frac{2}{3}$ gilt $\psi(p) = 1$

Lemma 3

Für jedes p ist $\psi(p)$ entweder 0 oder 1.

Lemma 4

Seien p_1 und p_2 zwei Wahrscheinlichkeiten mit $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$. Dann gilt

$$\psi(p_1) \leq \psi(p_2)$$

Abschätzung der kritischen Werte $p_c(d)$

Lemma

Für die kritischen Werte der Kantenwahrscheinlichkeit $p_c(d)$ gilt:

$$p_c(2) \geq p_c(3) \geq p_c(4) \geq \dots$$

Die Anzahl der unendlichen Komponenten

Satz

Für die Kantenperkolation auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 2$) mit $p > p_c(d)$ gilt:

$$\mathbb{P}(\text{es gibt genau eine unendliche Zusammenhängende Komponente}) = 1$$

Literatur

Olle Häggström
Streifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheorie
Springer 2006
Kapitel 5

Ende

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!