ulm university universität uulm

Poisson-Prozesse im $\mathbb{R}^d$

Felix Joos | 06. Mai 2010

Inhalt

Inhalt

Grundlegendes

Sei $X \sim Poi(\lambda)$.

Eigenschaften

- $P[X = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$
- $E[X] = \lambda$
- $Var X = \lambda$
- $E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X = n] \cdot z^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{-\lambda(1-z)}$

Grundlegendes

Sei $X \sim Poi(\lambda)$.

Eigenschaften

- $P[X = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$
- $E[X] = \lambda$
- $Var X = \lambda$
- $E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X = n] \cdot z^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{-\lambda(1-z)}$

Grundlegendes

Sei $X \sim Poi(\lambda)$.

Eigenschaften

- $P[X = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$
- $E[X] = \lambda$
- $VarX = \lambda$
- $E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X = n] \cdot z^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{-\lambda(1-z)}$

Grundlegendes

Sei $X \sim Poi(\lambda)$.

Eigenschaften

- $P[X = n] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$
- $E[X] = \lambda$
- $VarX = \lambda$
- $E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} P[X = n] \cdot z^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!} = e^{-\lambda(1-z)}$

Faltungsstabilität der Poissonverteilung

Lemma

Seien $X \sim Poi(\lambda)$ und $Y \sim Poi(\mu)$ unabhängig, dann ist

$$X + Y \sim Poi(\lambda + \mu).$$

Inhalt

Zählmaße

Definition

Sei $\mathbb{N}$ die Familie aller lokal endlichen Zählmaße
$\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$
Das heißt es gilt:

- $\varphi(B) < \infty \qquad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$
- $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)$ für paarweise disjunkte $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Zählmaße

Definition

Sei $\mathcal{N}$ die kleinste $\sigma-$ *Algebra* von Teilmengen von $\mathbb{N}$, sodass $\varphi \mapsto \varphi(B)$ für jedes beschränkte $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ eine $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))-$ *messbare* Abbildung ist.

Definition

Ein zufälliges Zählmaß $N : \Omega \to \mathbb{N}$ ist eine Zufallsvariable über einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in dem messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$.

Poissonsches Zählmaß

Definition

$\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ heißt *Poissonsches Zählmaß* mit dem lokal endlichen *Intensitätsmaß* μ, wenn

1. $N_{B_1}, N_{B_2}, \ldots$ unabhänige Zufallsvariablen sind für paarweise disjunkte $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ und
2. $N_B \sim Poi(\mu(B)) \qquad \forall B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.

Homogenität

Definition

Ist das Intensitätsmaß μ proportional zum Lebesguemaß ν, d.h. es gibt ein $\lambda \in (0, \infty)$, sodass gilt:

$$\mu(B) = \lambda\nu(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Dann ist $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ ein *homogenes Poissonsches Zählmaß* mit der *Intensität* λ.

Intensitätsfunktion

Definition

Ist das Intensitätsmaß μ absolutstetig bzgl. des Lebesgue-Maßes, d.h. es gibt eine messbare Funktion $\lambda : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ so dass

$$\mu(B) = \int_B \lambda(x)\, dx \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

dann wird $\lambda : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ die *Intensitätsfunktion* des Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ genannt.

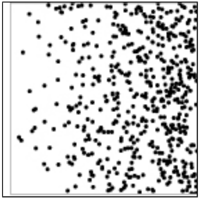
Intensitätsfunktion

Definition

Ist das Intensitätsmaß μ absolutstetig bzgl. des Lebesgue-Maßes, d.h. es gibt eine messbare Funktion $\lambda : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ so dass

$$\mu(B) = \int_B \lambda(x)\, dx \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

dann wird $\lambda : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ die *Intensitätsfunktion* des Poisson-Prozesses $\{N_B\}$ genannt.



Inhomogener Poisson-Prozess mit $\lambda(x_1, x_2) = c \cdot x_1 \quad \forall x_1 > 0$

Inhalt

Theorem

Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ *ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß* μ*.*
Dann gilt

$$P(N_{B_1} = k_1, ..., N_{B_n} = k_n) = \frac{\mu^{k_1}(B_1) \cdot ... \cdot \mu^{k_n}(B_n)}{k_1! \cdot ... \cdot k_n!} e^{-\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)}$$

für beliebige $n \geq 1, k_1, ..., k_n \geq 0$ *und paarweise disjunkte* $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$*.*

Theorem

Für paarweise disjunkte $B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ *mit* $\bigcup_{i=1}^n B_i = B$ *und* $0 < \mu(B) < \infty$ *gilt:*

$$P(N_{B_1} = k_1, ..., N_{B_n} = k_n | N_B = k) = \frac{k!}{k_1! \cdot ... \cdot k_n!} \frac{\mu^{k_1}(B_1) \cdot ... \cdot \mu^{k_n}(B_n)}{\mu^k(B)}$$

für beliebige $k, k_1, ...k_n \geq 0$ *mit* $k = k_1 + ... + k_n$.

Konstruktion

Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty)$ ein beliebiges endliches Maß mit $0 < \mu(\mathbb{R}^d) < \infty$ und $N : \Omega \to [0, \infty)$ bzw. $S_1, S_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}^d$ seien unabhängige Zufallsvariablen mit

$$N \sim Poi(\mu(\mathbb{R}^d)), \qquad S_i \sim \frac{\mu(\cdot)}{\mu(\mathbb{R}^d)} \quad \forall i \geq 1$$

Konstruktion

Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty)$ ein beliebiges endliches Maß mit $0 < \mu(\mathbb{R}^d) < \infty$ und $N : \Omega \to [0, \infty)$ bzw. $S_1, S_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}^d$ seien unabhängige Zufallsvariablen mit

$$N \sim Poi(\mu(\mathbb{R}^d)), \qquad S_i \sim \frac{\mu(\cdot)}{\mu(\mathbb{R}^d)} \quad \forall i \geq 1$$

Dann ist das zufällige Zählmaß $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ mit

$$N_B = \#\{i : 1 \leq i \leq N, S_i \in B\} \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß μ.

Überlagerung

Theorem

Sei $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \ldots$ eine Folge unabhänigiger Poisson-Prozesse im $\mathbb{R}^d$ mit den Intensitätsmaßen $\mu_1, \mu_2, \ldots$, so dass das Maß $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$ lokal endlich ist.
Dann ist $\{N_B\}$ mit $N_B = \sum_{i=1}^{\infty} N_B^{(i)}$ ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß μ.

Inhalt

Einführung

Wiederholung

Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität λ. Dann gilt:

$$N_{(a,b)} \sim Poi(\lambda(b-a)).$$

Grenzwertbetrachtung

Theorem

Sei $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ auf $(0, \infty)$. Dann gilt für die Anzahl der Punkte $N_{(0,t]}$ im Intervall $(0, t]$:

$$P\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N_{(0,t]}}{t} = \lambda\right) = 1$$

Literatur

V. Schmidt
Räumliche Statistik (Vorlesungsskript)
Kapitel 2.1, 2.2 und 2.3

J. F. C. Kingman (1993)
Oxford Studies in Probability 3
Poisson Processes
Clarendon press Oxford 1993, 1-10 38-43

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

felix.joos@uni-ulm.de