



Integralgeometrie und Stereologie

### Übersicht

Grundlagen aus der Integralgeometrie

Übergang zur Stereologie

#### Stereologie

- Modell-basierte Stereologie
- Design-basierte Stereologie

### Integralgeometrie und Stereologie

Grundlagen aus der Integralgeometrie

Übergang zur Stereologie

Stereologie

- Modell-basierte Stereologie
- Design-basierte Stereologie

## **Betrachtung: Konvexe Mengen**

# Definition

Sei  $K \subset V$  (V: Vektorraum). K heißt **konvex**, wenn für alle  $a, b \in K$  deren Verbindungsstrecke in K liegt.

 $\mathfrak K$  bezeichne das System aller konvexen Mengen in V.

## **Betrachtung: Konvexe Mengen**

### Definition

Sei  $K \subset V$  (V: Vektorraum). K heißt **konvex**, wenn für alle  $a, b \in K$  deren Verbindungsstrecke in K liegt.

 ${\mathfrak K}$  bezeichne das System aller konvexen Mengen in V.

## Bemerkung

Für  $A, B \in \mathcal{K}$  gilt:  $A \cap B \in \mathcal{K}$ .

 $(A \cup B \in \mathcal{K} \text{ im Allgemeinen nicht})$ 

- definiere Beobachtungsfenster M
- ▶ definiere  $f: \mathcal{K} \to \mathbb{R}$  (Inhalt/Volumen)

- definiere Beobachtungsfenster *M*
- ▶ definiere  $f: \mathcal{K} \to \mathbb{R}$  (Inhalt/Volumen)
- ▶ verschiebe und rotiere M (bezeichne dieses M')

- definiere Beobachtungsfenster *M*
- ▶ definiere  $f: \mathcal{K} \to \mathbb{R}$  (Inhalt/Volumen)
- verschiebe und rotiere M (bezeichne dieses M')
- ▶ Was "erwarten" wir für  $f(K \cap M')$ ? Können wir überhaupt was "erwarten"?

#### Herr Mannesmann

Herr Mannesmann - inzwischen heißt er Herr Vodaphone - hat nur D2: nämlich 2 Dimensionen. Er hat diesen Vortrag soweit verfolgt und soweit die Idee verstanden. Nun interessiert sich für die Fläche eines Objektes das sich in seiner Welt befindet und er weiß von diesem, dass es konvex ist. Er weiß von sich selbst, dass er auch konvex, ist und er weiß von sich - wenn er sich auf diesem Objekt befindet - wieviel von ihm dieses Objekt bedeckt. So denkt er sich, er ist das ideale Messfenster, um den Inhalt dieses Objekt berechnen zu können. Auch besitzt seine Welt einen Nullpunkt um den er sich drehen kann (ohne seine Form zu verändern). So kann er jede beliebige Drehung in  $[0,2\pi]$  erdenken und nimmt hierfür einfach die Gleichverteilung an.

Jedoch weiß er nicht wo seine Welt aufhört - er hat schon öfters versucht das rauszufinden, musste aber jedes mal aufgeben. Somit schlägt auch sein Versuch fehl, das Objekt zu messen. Wie kann ihm geholfen werden?

 $ightharpoonup \mathbb{R}^d$  ist nicht kompakt

- $ightharpoonup \mathbb{R}^d$  ist nicht kompakt
- ightharpoonup jedoch ist  $\mathbb{R}^d$  lokal kompakt

- $ightharpoonup \mathbb{R}^d$  ist nicht kompakt
- ightharpoonup jedoch ist  $\mathbb{R}^d$  lokal kompakt
- ▶ Lösung "Einschränkung" auf eine kompakte konvexe Menge  $A \in \mathcal{K}$

- $ightharpoonup \mathbb{R}^d$  ist nicht kompakt
- ▶ jedoch ist  $\mathbb{R}^d$  lokal kompakt
- ▶ Lösung "Einschränkung" auf eine kompakte konvexe Menge  $A \in \mathcal{K}$
- Lösung für Herrn Mannesmann?

### **Erwartungswert des Schnittes**

- f: Messende Funktion
- K: konvexe Menge
- $\rho(M+\xi)$ : Verschiebung der Menge M um  $\xi$  und Drehung um  $\rho$
- ightharpoonup da  $\mathbb{R}^d$  nur lokal kompakt: Einschränkung auf kompaktes A

$$\mathbb{E}f(K \cap \rho(M+\xi)) = \frac{\int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} f(K \cap R(M+x)) dx dR}{\int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}\{A \cap R(M+x) \neq \emptyset\} dx dR}$$

### Kümmern wir uns um den Nenner: Spezialfall

$$\mathbb{E}f(K \cap \rho(M+\xi)) = \frac{\int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} f(K \cap R(M+x)) dx dR}{\int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}\{A \cap R(M+x) \neq \emptyset\} dx dR}$$

M: Kugel  $B_r(o)$  mit Radius r > 0

$$A = K$$

$$\int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}\{K \cap R(B_r(o) + x) \neq \emptyset\} dx dR = v_d(K \oplus B_r(o))$$

#### Steiner-Formel

$$v_d(K \oplus B_r(o)) = \sum_{j=0}^d r^{d-j} \kappa_{d-j} V_j(K)$$

mit  $\kappa_i$ : Volumen der *i*-ten Einheitskugel

### simples Beispiel: Steiner Fromel

$$v_d(K \oplus B_r(o)) = \sum_{j=0}^d r^{d-j} \kappa_{d-j} V_j(K)$$



### Die Rolle von $V_i$

- ▶ definieren innere Volumina V<sub>0</sub>,... V<sub>d</sub>
- ▶  $V_0(K) = \mathbf{1}\{K \neq \emptyset\}$ : Euler-Charakteristik  $(\chi(K))$
- V<sub>1</sub>(K): "mittlere Breite"
- V<sub>d-1</sub>(K): 1/2 der Oberfläche
- V<sub>d</sub>(K): Volumen von K

### **Ergebnis**

Nenner lässt sich als Linearkombination über  $V_i(K)$  ausdrücken.

Später: Ersetzung von  $V_j$  durch ein f mit folgenden Eigenschaften.

#### Definition

Wir nennen eine Funktion  $f: \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ :

- **bewegungsinvariant**, wenn  $f(R(K+x)) = f(K) \forall K$  konvex,  $R \in SO_d$  und  $x \in \mathbb{R}^d$
- ▶ homogen vom Grad j, wenn  $f(\alpha K) = \alpha^j f(K) \ \forall K$  konvex,  $\alpha \ge 0$
- **additiv**, wenn  $f(\emptyset) = 0$  und  $f(K \cup M) = f(K) + f(M) f(K \cap M) ∀ K, M$  konvex :  $K \cup M$  konvex
- ▶ monoton, wenn  $f(K) \le f(M)$ ,  $\forall K,M$  konvex und  $K \subset M$

# **Ergebnis**

# Bemerkung

Die Steinerformel zeigt:

- $V_i: \mathcal{K} \to \mathbb{R}$  ist bewegungsinvariant
- ▶ V<sub>i</sub> ist homogen vom Grad j

## Satz von Hadwiger

### Theorem

Sei  $f: K \to \mathbb{R}$  additiv, bewegungsinvariant und monoton.

Dann gibt es  $c_0,...,c_d \ge 0$ , sodass

$$f = \sum_{j=0}^{d} c_j V_j$$

### Satz von Hadwiger

#### **Theorem**

Sei  $f: K \to \mathbb{R}$  additiv, bewegungsinvariant und monoton.

Dann gibt es  $c_0,...,c_d \ge 0$ , sodass

$$f = \sum_{j=0}^{d} c_j V_j$$

→ f muss nur diese Eigenschaften haben um es als Linearkombination der intrinsischen Volumina ausdrücken zu können.

### **Kinematische Hauptformel**

Sei  $j \in \{0, ..., d\}$  und K, M konvexe Mengen.

$$\int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} V_j(K \cap R(M+x)) dx dR = \sum_{k=j}^d c_{j,d}^{k,d-k+j} V_k(K) V_{d-k+j}(M)$$

mit den Konstanten

$$c_{s_1,\ldots,s_k}^{r_1,\ldots,r_k} = \prod_{i=1}^k \frac{r_i! \kappa_{r_i}}{s_i! \kappa_{s_i}}$$

## **Kinematische Hauptformel**

Sei  $j \in \{0, ..., d\}$  und K, M konvexe Mengen.

$$\int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} V_j(K \cap R(M+x)) dx dR = \sum_{k=j}^d c_{j,d}^{k,d-k+j} V_k(K) V_{d-k+j}(M)$$

mit den Konstanten

$$c_{s_1,\ldots,s_k}^{r_1,\ldots,r_k} = \prod_{i=1}^k \frac{r_i! \, \kappa_{r_i}}{s_i! \, \kappa_{s_i}}$$

$$c_{j,d}^{k,d-k+j} = \frac{k! \kappa_k}{j! \kappa_j} \cdot \frac{(d-k+j)! \kappa_{d-k+j}}{d! \kappa_d}$$

# ursprüngliche Frage nach $f = V_i$

$$\mathbb{E}V_{j}(K \cap \rho(M+\xi)) = \frac{\int_{SO_{d}} \int_{\mathbb{R}^{d}} f(K \cap R(M+x) dx dR}{\int_{SO_{d}} \int_{\mathbb{R}^{d}} \mathbf{1}\{A \cap R(M+x) \neq \emptyset\} dx dR}$$

$$= \frac{\sum_{k=j}^{d} c_{j,d}^{k,d-k+j} V_{k}(K) V_{d-k+j}(M)}{\sum_{k=0}^{d} V_{k}(A) V_{d-k}(M)}$$

#### **Crofton Formel**

Sei  $\mathcal{E}_k^d$  der Raum aller k-dimensionaler Ebenen im  $\mathbb{R}^d$ Für  $0 \le j \le k < d$  und K konvex gilt

$$\int_{\mathcal{E}_k^d} V_j(K \cap E) dE = c_{j,d}^{k,d-k+j} V_{d-k+j}(K)$$

$$\text{mit } c_{j,d}^{k,d-k+j} = \frac{k!\kappa_k}{j!\kappa_i} \cdot \frac{(d-k+j)!\kappa_{d-k+j}}{d!\kappa_d},$$

κ<sub>i</sub>: Das Volumen der i-ten Einheitskugel

## Integralgeometrie und Stereologie

Grundlagen aus der Integralgeometrie

# Übergang zur Stereologie

Stereologie

- Modell-basierte Stereologie
- Design-basierte Stereologie

## **Polykonvexe Mengen**

#### **Definition**

Eine Menge P heißt polykonvex, wenn

$$\exists K_1, \dots, K_n \subset \mathfrak{K} : P = \bigcup_{i=1}^n K_i.$$

# Gültigkeit der Sätze für polykonvexe Mengen

Additivität:  $f(\emptyset) = 0$  und  $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$ 

#### **Theorem**

Sei P polykonvex

$$V_{j}(P) = V\left(\bigcup_{i=1}^{m} K_{i}\right) = \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_{1} < \dots < i_{r} \leq m} V_{j}(K_{i_{1}} \cap \dots \cap K_{i_{r}})$$

## Gültigkeit der Sätze für polykonvexe Mengen

Additivität:  $f(\emptyset) = 0$  und  $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$ 

#### **Theorem**

Sei P polykonvex

$$V_{j}(P) = V\left(\bigcup_{i=1}^{m} K_{i}\right) = \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_{1} < \dots < i_{r} \leq m} V_{j}(K_{i_{1}} \cap \dots \cap K_{i_{r}})$$

→ Kinematischer Hauptsatz und Crofton-Formel bleiben auch für polykonvexe Mengen gültig.

### Integralgeometrie und Stereologie

Grundlagen aus der Integralgeometrie

Übergang zur Stereologie

### Stereologie

- Modell-basierte Stereologie
- Design-basierte Stereologie

### **Stereologie**

- stereos: fest, körperlich
- behandelt Verhältnis von Schnitten zur Charakteristik des Körpers selbst
- Anwendung: Materialwissenschaft, Medizin
- keine völlige Rekonstruktion des Körpers, sondern bestimmte Eigenschaften interessant

#### **Definitionen**

#### Definition

Sei  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung  $Z: \Omega \to \mathcal{F}$  ( $\mathcal{F}$  abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ ) heißt zufällig abgeschlossene Menge (ZAM) in  $\mathbb{R}^n$ , wenn sie  $(\mathbb{A}, \mathcal{B}(\mathcal{F}))$ -messbar ist.

$$Z^{-1}(A) \in \mathbb{A} \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{F}).$$

- ▶ Die ZAM Z heißt **stationär**, wenn sie invariant gegenüber Verschiebung  $(\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_{Z+x})$  ist.
- ▶ Die ZAM Z heißt **isotrop**, wenn sie invariant gegenüber Drehung  $(\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_{\phi Z})$  ist.

### **Volumen pro Einheitsvolumen**

$$\frac{\mathbb{E}V_j(Z\cap W)}{V_d(W)}$$

→ Problem: Rand des Schnittes (Rand-Effekt)

### j-tes spezifisches inneres Volumen

Um das innere Volumen pro Volumeneinheit zu berechnen braucht wir:

Sei W konvex und  $v_d(W) > 0$ 

$$\overline{V}_j(Z) := \lim_{r \to \infty} \frac{\mathbb{E} V_j(Z \cap rW)}{V_d(rW)}$$

### **Kinematische Hauptformel**

### **Theorem**

Sei Z isotrop, stationär, fast sicher lokal polykonvex und genüge

$$\mathbb{E}2^{N(Z\cap[0,1]^d)}<\infty,$$

 $j \in \{0, \ldots, d\}$  und W konvex

$$\mathbb{E}V_{j}(Z\cap W) = \sum_{k=i}^{d} c_{j,d}^{k,d-k+j} \overline{V}_{k}(Z) V_{d-k+j}(W)$$

Bemerkung: Ist W eine Kugel, j = d oder j = d - 1 ist die Bedingung der Isotropie nicht nötig.

## Crofton Formel für zufällige Mengen

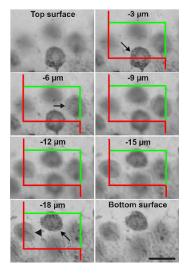
#### **Theorem**

Falls Z isotrop und  $E \in \mathcal{E}_k^d$  mit  $0 \le j \le k < d$ , dann

$$\overline{V}_j(Z\cap E)=c_{j,k}^{k,d-k+j}\overline{V}_{d-k+j}(Z)$$

## **Design-basierte Stereologie**

- festgelegte Mengen
- ► Messungen "variabel"



- ▶ Ziel: Wie viele Partikel sind in der Probe enthalten?
- $L_0 \in \mathcal{L}_{d-1}^d$  mit Verschiebung um  $x \in L_0^{\perp}$ , sodass sie A trifft

- Ziel: Wie viele Partikel sind in der Probe enthalten?
- ▶  $L_0 \in \mathcal{L}_{d-1}^d$  mit Verschiebung um  $x \in L_0^{\perp}$ , sodass sie A trifft
- Definiere zwei Hyperebenen (E, E<sub>\varepsilon</sub>) in Abstand \varepsilon

- Ziel: Wie viele Partikel sind in der Probe enthalten?
- ▶  $L_0 \in \mathcal{L}_{d-1}^d$  mit Verschiebung um  $x \in L_0^{\perp}$ , sodass sie A trifft
- Definiere zwei Hyperebenen (E, E<sub>\varepsilon</sub>) in Abstand \varepsilon
- $ightharpoonup K_1, \ldots, K_m$  die Partikel in A
- ▶  $N_{E,E_{\varepsilon}}$  die Anzahl der Partikel, die E treffen, jedoch **nicht**  $E_{\varepsilon}$

- Ziel: Wie viele Partikel sind in der Probe enthalten?
- ▶  $L_0 \in \mathcal{L}_{d-1}^d$  mit Verschiebung um  $x \in L_0^{\perp}$ , sodass sie A trifft
- ▶ Definiere zwei Hyperebenen  $(E, E_{\varepsilon})$  in Abstand  $\varepsilon$
- $\triangleright$   $K_1, \dots, K_m$  die Partikel in A
- N<sub>E,Eε</sub> die Anzahl der Partikel, die E treffen, jedoch nicht Eε
- Abschätzung:

$$m \approx \hat{V}_0 = \frac{c(A)}{\varepsilon} N_{E,E_{\varepsilon}}$$

ightharpoonup wenn fast sicher die orthogonale Höhe der Partikel  $< \varepsilon$ 

#### **Ende**

# Danke für die Aufmerksamkeit