



Tessellationen

Inhalt

Einführung

Voronoi Tessellation



Algorithmus zur Erstellung von Voronoi Tessellationen



Homogener Poisson Prozess



Poisson-Voronoi Tessellation

Inhalt

Einführung

Voronoi Tessellation



Algorithmus zur Erstellung von Voronoi Tessellationen



Homogener Poisson Prozess



Poisson-Voronoi Tessellation

Grundlegende Idee

Eine gegebene Grundmenge in abzählbar viele konvexe Teilmengen zu zerlegen.

Grundlegende Idee

Eine gegebene Grundmenge in abzählbar viele konvexe Teilmengen zu zerlegen.

Definition:

Eine Tessellation τ in $\mathbb{R}^2$ ist eine abzählbare Familie $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ mit

- ▶ $\overset{\circ}{\xi}_n$ sind konvex.
- ▶ $\overset{\circ}{\xi}_n \neq \emptyset$.
- ▶ $\overset{\circ}{\xi}_n \cap \overset{\circ}{\xi}_m = \emptyset$ für alle $n \neq m$.
- ▶ $\bigcup_{n \geq 1} \overset{\circ}{\xi}_n = \mathbb{R}^2$.
- ▶ $\sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\xi_n \cap C \neq \emptyset\}} < \infty$, wobei $C \in \mathcal{C}$ ist und $\mathcal{C}$ ist die Familie der kompakten Mengen in $\mathbb{R}^2$.

Problem

Numerische Überprüfung, ob die Teilmengen konvex sind.

Problem

Numerische Überprüfung, ob die Teilmengen konvex sind.

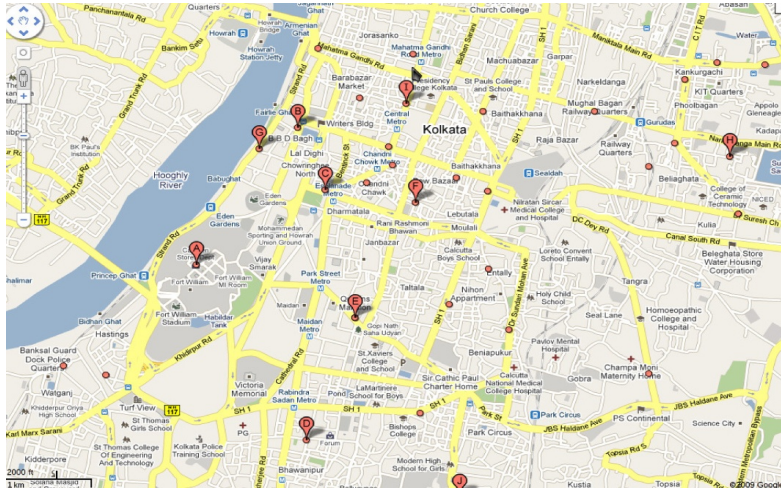
Definition: Konvexität

Ein Menge A ist konvex genau dann, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\lambda a + (1 - \lambda) b \in A \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \lambda \in [0, 1]$$

Motivation

- **Problem:** Man möchte wissen, wie groß und welche Form der Zuständigkeitsbereich von beispielsweise Postämter ist.



Motivation

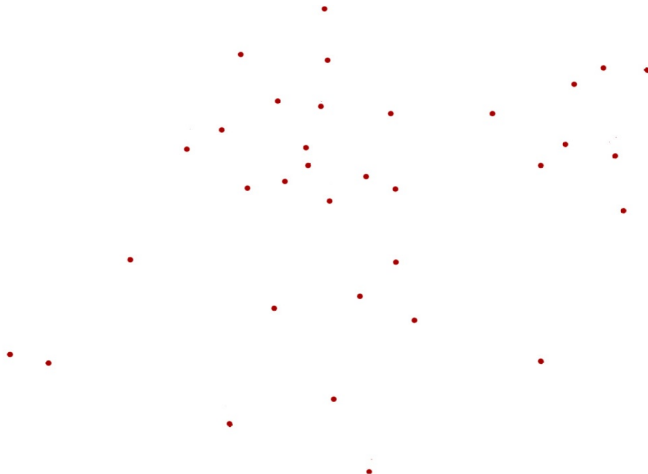


Abbildung: Jeder Punkt ist eine Postamt.

Motivation

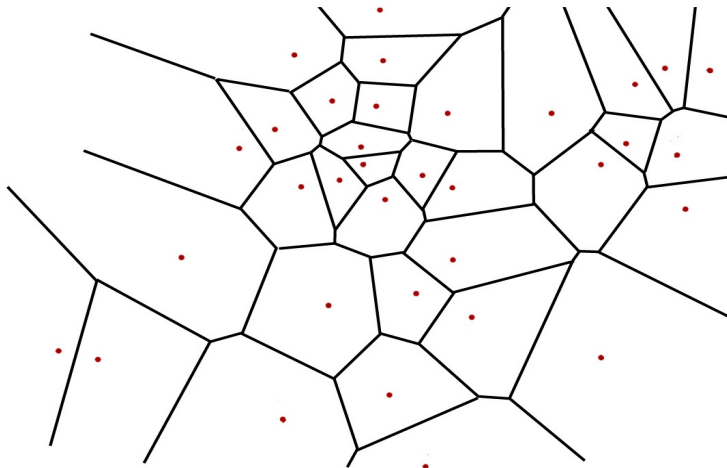


Abbildung: Eine Voronoi Tessellation wurde durchgeführt.

Motivation

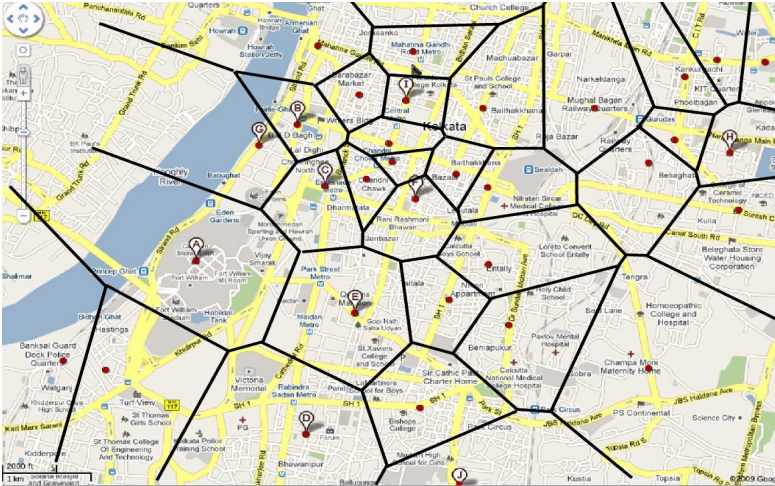


Abbildung: Voronoi Tessellation auf gestelltes Problem übertragen.

Inhalt

Einführung

Voronoi Tessellation



Algorithmus zur Erstellung von Voronoi Tessellationen



Homogener Poisson Prozess



Poisson-Voronoi Tessellation

Definitionen Voronoi Tessellation

- ▶ Sei $P = \{ p_1, \dots, p_n \}$ eine Punktmenge in $\mathbb{R}^2$.
- ▶ Voronoi Zelle:

$$\xi_k = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x - p_k| \leq |x - p_m| \text{ mit } k \neq m \}$$

- ▶ Jede Voronoi Zelle $vo(p)$ enthält einen Punkt.
 - ▶ Voronoi Kante: Mittelsenkrechte zwischen p_n und p_m .
 - ▶ Voronoi Eckpunkte
-
- ▶ *"Die Voronoi Zelle ξ_k von p_k enthält alle Punkte in $\mathbb{R}^2$, deren Abstand zu p_k kleiner ist, als der Abstand zu allen anderen Punkten p_m ".*

Inhalt

Einführung

Voronoi Tessellation



Algorithmus zur Erstellung von Voronoi Tessellationen



Homogener Poisson Prozess



Poisson-Voronoi Tessellation

Algorithmus zur Erstellung von Voronoi Tessellationen

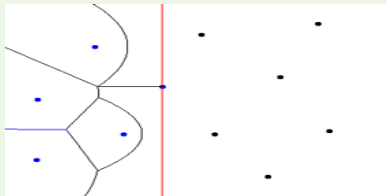
Naiver Ansatz: $O(n^2 \log(n))$ - jede Zelle einzeln konstruiert.

Algorithmus zur Erstellung von Voronoi Tessellationen

Naiver Ansatz: $O(n^2 \log(n))$ - jede Zelle einzeln konstruiert.

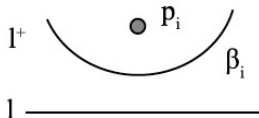
Fortune Sweep-Line Algorithmus - FSL-Algorithmus

- ▶ Name: Sweep-Line "fegt" den Raum auf.



- ▶ Rote Linie: Sweep-Line.
- ▶ Schwarze Strecken: sich bildende Voronoi Kanten.
- ▶ Schwarze Parabeln: Bubble-Line oder Beach-Line.
- ▶ Blaue Linie: Bereits feste Voronoi Kanten.
- ▶ Aufwand: $O(n \log(n))$.

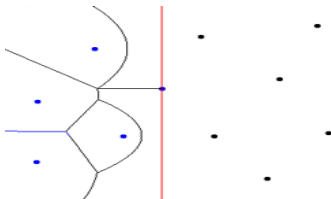
Vorgehen des FSL-Algorithmus



- ▶ l^+ - Halbebene überhalb l .
- ▶ Sei β_i eine senkrechte Parabel mit p_i als Fokus.
- ▶ β_i besteht aus Punkten in l^+ , welche den gleichen Abstand von p_i und l haben.
- ▶ Sweep Line l "fegt" von oben nach unten $\Rightarrow \beta_i$ wird dabei flacher.
- ▶ Zwei Events, bei denen Komponenten des Voronoi Diagramms entstehen
 - ▶ point event - neue Voronoi Kante
 - ▶ circle event - neue Voronoi Kante als auch Voronoi Eckpunkt

point event

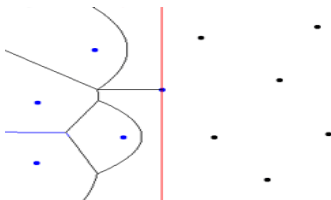
Ein point event findet statt, wenn Sweep-Line den Punkt p_n erreicht.



1. Eine orthogonale Gerade γ zur Beach-Line durch den Punkt p_n wird gebildet.

point event

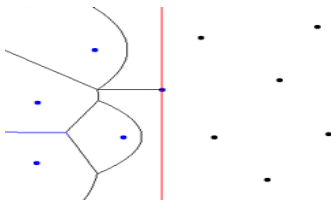
Ein point event findet statt, wenn Sweep-Line den Punkt p_n erreicht.



1. Eine orthogonale Gerade γ zur Beach-Line durch den Punkt p_n wird gebildet.
2. Es entsteht eine neue senkrechte Parabel β_n für den Punkt p_n mit der Eigenschaft, dass die Spiegelachse der Parabel γ ist.

point event

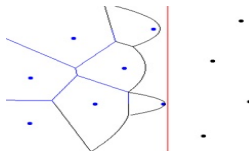
Ein point event findet statt, wenn Sweep-Line den Punkt p_n erreicht.



1. Eine orthogonale Gerade γ zur Beach-Line durch den Punkt p_n wird gebildet.
2. Es entsteht eine neue senkrechte Parabel β_n für den Punkt p_n mit der Eigenschaft, dass die Spiegelachse der Parabel γ ist.
3. Der Schnitt von β_n mit der restlichen Beach-Line beginnt eine neue Voronoi Kante zu bilden.

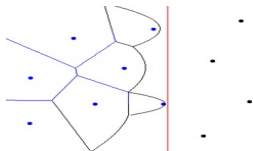
circle event

Ein circle event findet statt, wenn zwei sich bildende (schwarze) Voronoi Kanten einen Schnittpunkt haben.



circle event

Ein circle event findet statt, wenn zwei sich bildende (schwarze) Voronoi Kanten einen Schnittpunkt haben.



- ▶ Bei einem circle event entsteht einen Voronoi Eckpunkt sowie eine neue Voronoi Kante.
- ▶ Voronoi Eckpunkt ist der Kreismittelpunkt von p_i, p_j, p_k .
- ▶ Neue Voronoi Kante entsteht zwischen den beiden sich treffenden Kreisbögen.

Inhalt

Einführung

Voronoi Tessellation



Algorithmus zur Erstellung von Voronoi Tessellationen



Homogener Poisson Prozess



Poisson-Voronoi Tessellation

Wiederholung

Definition eines Poisson Prozesses:

- ▶ Sei $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ die Familie aller beschränkter Borel-Mengen in $\mathbb{R}^d$.
- ▶ Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ ein beliebiges lokal-endliches Maß, d.h. $\mu(B) < \infty$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.
- ▶ $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ ist ein Poissonsches Zählmaß mit Intensitätsmaß μ , wenn
 1. $N_{B_1}, N_{B_2}, \dots$ unabhängige ZV sind, für paarweise disjunkten $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$.
 2. $N_B \sim \text{Poi}(\mu(B))$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$. $\{N_B\}$ wird auch Poisson Prozess genannt.
- ▶ Falls zusätzlich gilt:

$$\mu(B) = \lambda \nu_d(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ mit } \lambda \in (0, \infty)$$

Dann wird $\{N_B\}$ ein homogener Poisson Prozess genannt.

Simulation: Homogener Poisson-Prozess

Ziel:

Simulation eines homogenen Poisson Prozesses mit Intensität $\lambda > 0$ im Kreis mit Radius $r > 0$ um 0.

Simulation: Homogener Poisson-Prozess

Ziel:

Simulation eines homogenen Poisson Prozesses mit Intensität $\lambda > 0$ im Kreis mit Radius $r > 0$ um 0.

- **Schritt 0** : Generiere Zufallszahlen $t_1, t_2, \dots, t_{n(r)}$ gemäß der Verteilung $\text{Exp}(1)$, wobei

$$n(r) = \#\left\{i : \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \leq r\right\}.$$

Simulation: Homogener Poisson-Prozess

Ziel:

Simulation eines homogenen Poisson Prozesses mit Intensität $\lambda > 0$ im Kreis mit Radius $r > 0$ um 0.

- **Schritt 0** : Generiere Zufallszahlen $t_1, t_2, \dots, t_{n(r)}$ gemäß der Verteilung $\text{Exp}(1)$, wobei

$$n(r) = \#\left\{i : \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \leq r\right\}.$$

- **Schritt 1** : Generiere Zufallszahlen $u_1, u_2, \dots, u_{n(r)}$ gemäß der Verteilung $U(0, 2\pi)$.

Simulation: Homogener Poisson-Prozess

Ziel:

Simulation eines homogenen Poisson Prozesses mit Intensität $\lambda > 0$ im Kreis mit Radius $r > 0$ um 0.

- **Schritt 0** : Generiere Zufallszahlen $t_1, t_2, \dots, t_{n(r)}$ gemäß der Verteilung $\text{Exp}(1)$, wobei

$$n(r) = \#\left\{i : \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \leq r\right\}.$$

- **Schritt 1** : Generiere Zufallszahlen $u_1, u_2, \dots, u_{n(r)}$ gemäß der Verteilung $U(0, 2\pi)$.
- **Schritt 2** : Berechne die Vektoren $(s_1, u_1), \dots, (s_{n(r)}, u_{n(r)})$, wobei

$$s_i = \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \quad \forall i \geq 1.$$

Simulation: Homogener Poisson-Prozess

Ziel:

Simulation eines homogenen Poisson Prozesses mit Intensität $\lambda > 0$ im Kreis mit Radius $r > 0$ um 0.

- **Schritt 0** : Generiere Zufallszahlen $t_1, t_2, \dots, t_{n(r)}$ gemäß der Verteilung $\text{Exp}(1)$, wobei

$$n(r) = \#\left\{i : \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \leq r\right\}.$$

- **Schritt 1** : Generiere Zufallszahlen $u_1, u_2, \dots, u_{n(r)}$ gemäß der Verteilung $U(0, 2\pi)$.
- **Schritt 2** : Berechne die Vektoren $(s_1, u_1), \dots, (s_{n(r)}, u_{n(r)})$, wobei

$$s_i = \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \quad \forall i \geq 1.$$

- **Schritt 3** : Transformiere $(s_1, u_1), \dots, (s_{n(r)}, u_{n(r)})$ mit
 $\mathbf{T}(s, u) = (s \cos u, s \sin u) \quad \forall s \geq 0, u \in [0, 2\pi].$

Simulation: Homogener Poisson-Prozess

Ziel:

Simulation eines homogenen Poisson Prozesses mit Intensität $\lambda > 0$ im Kreis mit Radius $r > 0$ um 0.

- ▶ **Schritt 0** : Generiere Zufallszahlen $t_1, t_2, \dots, t_{n(r)}$ gemäß der Verteilung $\text{Exp}(1)$, wobei

$$n(r) = \#\left\{i : \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \leq r\right\}.$$

- ▶ **Schritt 1** : Generiere Zufallszahlen $u_1, u_2, \dots, u_{n(r)}$ gemäß der Verteilung $U(0, 2\pi)$.
- ▶ **Schritt 2** : Berechne die Vektoren $(s_1, u_1), \dots, (s_{n(r)}, u_{n(r)})$, wobei

$$s_i = \sqrt{\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\pi\lambda}} \quad \forall i \geq 1.$$

- ▶ **Schritt 3** : Transformiere $(s_1, u_1), \dots, (s_{n(r)}, u_{n(r)})$ mit

$$\mathbf{T}(s, u) = (s \cos u, s \sin u) \quad \forall s \geq 0, u \in [0, 2\pi].$$

$\Rightarrow \mathbf{T}(s_1, u_1), \dots, \mathbf{T}(s_{n(r)}, u_{n(r)})$ ist eine Realisierung eines homogenen Poisson Prozesses im Kreis $B(0, r)$.

Inhalt

Einführung

Voronoi Tessellation



Algorithmus zur Erstellung von Voronoi Tessellationen



Homogener Poisson Prozess



Poisson-Voronoi Tessellation

Poisson-Voronoi Tessellation

- ▶ Die Punktmenge $P = \{ p_1, p_2, \dots \}$ wurde durch einen Poisson-Prozess simuliert.
- ▶ Herkömmliche Voronoi - Tessellation.

Typische Zelle

Motivation: Eigenschaft der Zellen herausfinden, wie:

- ▶ Verteilung der Anzahl der Ecken.
- ▶ Verteilung der Gesamtlänge der Kanten.

⇒ Dafür muss nur ein Teil der Tessellation simuliert werden .

Typische Zelle

Motivation: Eigenschaft der Zellen herausfinden, wie:

- ▶ Verteilung der Anzahl der Ecken.
- ▶ Verteilung der Gesamtlänge der Kanten.

⇒ Dafür muss nur ein Teil der Tessellation simuliert werden .

⇒ Über eine typische Zelle kann man sagen:

- ▶ Die typische Zelle ist eine zufällige ausgewählte Zelle.

Lokale Simulation einer typischen Poisson-Voronoi Zelle

Ziel: Konstruktion einer typischen PV Zelle um den Punkt o :

Lokale Simulation einer typischen Poisson-Voronoi Zelle

Ziel: Konstruktion einer typischen PV Zelle um den Punkt o :

Grundlage

- ▶ Sei $X = \{X_n\}$ ein homogener Poisson Prozess mit Intensität $\lambda > 0$.
- ▶ $X^* = X \cup \{o\}$.
- ▶ Die typische Zelle kann definiert werden als $\Psi_X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H(o, X_n)$, d.h. der Schnitt aller Halbebenen $H(o, X_n)$ zwischen o und X_n .

Lokale Simulation einer typischen Poisson-Voronoi Zelle

Ziel: Konstruktion einer typischen PV Zelle um den Punkt o :

Grundlage

- ▶ Sei $X = \{X_n\}$ ein homogener Poisson Prozess mit Intensität $\lambda > 0$.
 - ▶ $X^* = X \cup \{o\}$.
 - ▶ Die typische Zelle kann definiert werden als $\Psi_X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H(o, X_n)$, d.h. der Schnitt aller Halbebenen $H(o, X_n)$ zwischen o und X_n .
-
1. Simuliere $X_1, X_2, \dots$ mit wachsendem Abstand zu o bis eine beschränkte Voronoi Zelle konstruiert werden kann.

Lokale Simulation einer typischen Poisson-Voronoi Zelle

Ziel: Konstruktion einer typischen PV Zelle um den Punkt o :

Grundlage

- ▶ Sei $X = \{X_n\}$ ein homogener Poisson Prozess mit Intensität $\lambda > 0$.
 - ▶ $X^* = X \cup \{o\}$.
 - ▶ Die typische Zelle kann definiert werden als $\Psi_X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H(o, X_n)$, d.h. der Schnitt aller Halbebenen $H(o, X_n)$ zwischen o und X_n .
1. Simuliere $X_1, X_2, \dots$ mit wachsendem Abstand zu o bis eine beschränkte Voronoi Zelle konstruiert werden kann.
 2. Überprüfe nach jedem simulierten Punkt, ob dieser die Voronoi Zelle beeinflusst.

Grundlage

- ▶ Sei $X = \{X_n\}$ ein homogener Poisson Prozess mit Intensität $\lambda > 0$.
- ▶ $X^* = X \cup \{o\}$.
- ▶ Die typische Zelle kann definiert werden als $\Psi_X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H(o, X_n)$, d.h. der Schnitt aller Halbebenen $H(o, X_n)$ zwischen o und X_n .

Algorithmus

1. Setze $X^* = \{o\}$.

Grundlage

- ▶ Sei $X = \{X_n\}$ ein homogener Poisson Prozess mit Intensität $\lambda > 0$.
- ▶ $X^* = X \cup \{o\}$.
- ▶ Die typische Zelle kann definiert werden als $\Psi_X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H(o, X_n)$, d.h. der Schnitt aller Halbebenen $H(o, X_n)$ zwischen o und X_n .

Algorithmus

1. Setze $X^* = \{o\}$.
2. Simuliere unabhängige Zufallsvariablen $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ mit $\Phi_i \sim U[0, 2\pi)$ und $Y_1, Y_2, \dots$ mit $Y_i \sim \text{Exp}(1)$.

Grundlage

- ▶ Sei $X = \{X_n\}$ ein homogener Poisson Prozess mit Intensität $\lambda > 0$.
- ▶ $X^* = X \cup \{o\}$.
- ▶ Die typische Zelle kann definiert werden als $\Psi_X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H(o, X_n)$, d.h. der Schnitt aller Halbebenen $H(o, X_n)$ zwischen o und X_n .

Algorithmus

1. Setze $X^* = \{o\}$.
2. Simuliere unabhängige Zufallsvariablen $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ mit $\Phi_i \sim U[0, 2\pi)$ und $Y_1, Y_2, \dots$ mit $Y_i \sim \text{Exp}(1)$.
3. Simuliere die Punkte $X_1, X_2, \dots$ mit

$$X_n = (R_n \cos \Phi_n, R_n \sin \Phi_n) \text{ mit } R_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{\pi \lambda}}.$$

(Poisson Prozess)

Füge die Punkte zu X^* hinzu, solange bis eine Voronoi Zelle konstruiert werden kann.

Grundlage

- ▶ Sei $X = \{X_n\}$ ein homogener Poisson Prozess mit Intensität $\lambda > 0$.
- ▶ $X^* = X \cup \{o\}$.
- ▶ Die typische Zelle kann definiert werden als $\Psi_X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H(o, X_n)$, d.h. der Schnitt aller Halbebenen $H(o, X_n)$ zwischen o und X_n .

Algorithmus

1. Setze $X^* = \{o\}$.
2. Simuliere unabhängige Zufallsvariablen $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ mit $\Phi_i \sim U[0, 2\pi)$ und $Y_1, Y_2, \dots$ mit $Y_i \sim \text{Exp}(1)$.
3. Simuliere die Punkte $X_1, X_2, \dots$ mit

$$X_n = (R_n \cos \Phi_n, R_n \sin \Phi_n) \text{ mit } R_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{\pi \lambda}}.$$

(Poisson Prozess)

Füge die Punkte zu X^* hinzu, solange bis eine Voronoi Zelle konstruiert werden kann.

4. Wenn $R_n \geq 2 \max\{|v_i|\}$, wobei $\{v_i\}$ die Menge der Eckpunkte der Voronoi Zelle ist $\rightarrow$ Abbruch.

Literatur



Volker Schmidt

Räumliche Statistik

Kapitel 2



Henrik Zimmer

Voronoi and Delaunay Techniques

Lecture Notes, Computer Sciences VIII, RWTH Aachen



Florian Voss, Catherine Gloaguen, Volker Schmidt

Random tessellations and Cox processes

Preprint

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

`jurij-andrei.reichenecker@uni-ulm.de`