Brownsche Bewegung

Satz von Donsker

Bernd Barth

Universität Ulm

31.05.2010

Inhalt

Historische Entstehung

- Robert Brown entdeckte 1827 eine wärmeabhängige Bewegung von Teilchen in Flüssigkeiten.
- Er beobachtete wie Pollen in einem Wassertropfen unregelmäßige zuckende Bewegungen machten.

Zufällige Funktion

Definition

- Sei $C = C[0,1]$ die Menge der stetigen Funktionen auf $[0,1]$.
- Dann heißt die messbare Abbildung $X : \Omega \to C$ mit Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ zufällige Funktion.

Folgerung

- $X(\omega) \in C, \quad \forall \omega \in \Omega$
- Für feste t ist $X(t)$ die reelle Funktion auf Ω mit Wert $X(t,\omega)$ in ω.
- $\{X(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ heißt stochastischer Prozess.

Endlich-dimensionale Verteilungen

Sei $\{X(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ ein stochastischer Prozess.

Definition

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jedes n-Tupel $t_1, t_2, ... \in [0, 1]$ von Indizes wird die Mengenfunktion $P_{t_1,...,t_n} : \mathcal{B}(C^n) \to [0, 1]$ mit $P_{t_1,...,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = P(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n)$, $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ endlich-dimensionale Verteilung von $\{X_t\}$ genannt.

Straffheit

Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(C, \mathcal{C})$
und K eine kompakte Menge.

Definition

P ist straff, falls $\forall\, \epsilon > 0\ \ \exists\, K$, so dass gilt
$P(K) > 1 - \epsilon$.

Straffheit

Sei $w(X,\delta) = \sup_{|s-t|\leq\delta} |X(s) - X(t)|, \qquad 0 < \delta \leq 1.$

Satz

$\{X_n\}$ ist straff, genau dann wenn

- $\forall\ 0 < \eta \leq 1 \ \ \exists\ a$:

  $P\{|X_n(0)| > a\} \leq \eta, \qquad n \geq 1$

- $\forall \epsilon > 0$ und $0 < \eta \leq 1 \ \ \exists\ a,\ 0 < \delta < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$:

  $P\{w(X_n(t),\delta) \geq \epsilon\} \leq \eta,$

  $n \geq n_0, \forall t \in (0,1].$

Schwache Konvergenz

Seien P_n, P Warscheinlichkeitsmaße auf $(C, \mathcal{C})$.

Satz

Falls

- die endlich-dimensionalen Verteilungen von P_n schwach gegen die von P konvergieren und
- $\{P_n\}$ straff ist,

dann gilt

$$P_n \Longrightarrow P.$$

Konvergenz in Verteilung

Seien X_n und X zufällige Funktionen, wobei P_n die Verteilung von X_n und P die von X ist.

Definition (Konvergenz in Verteilung)

X_n konvergiert in Verteilung gegen X:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X,$$

falls $P_n \Longrightarrow P$.

Konstruktion einer zufälligen Funktion

- Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ iid Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.
- $S_0 = 0, \qquad S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$
- Wir setzen $X_n(\frac{i}{n}, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_i(\omega), \qquad \frac{i}{n} \in [0,1], \; \omega \in \Omega$

Lineare Interpolation

$$X_n(t,\omega) = \frac{\frac{i}{n} - t}{\frac{1}{n}} X_n(\tfrac{i-1}{n}) + \frac{t - \frac{i-1}{n}}{\frac{1}{n}} X_n(\tfrac{i}{n}), \qquad t \in [\tfrac{i-1}{n}, \tfrac{i}{n}], \; \omega \in \Omega$$

Beispiel

Gaußscher Random Walk

- Zufallsvariablen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mit
- $\xi_i \sim N(0, 1) \qquad i = 1, \ldots, n$

Straffheit

Satz

$\{X_n\}$ ist straff, falls $\quad \forall \epsilon > 0 \;, \; \lambda > 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$P\{\max_{i \leq n} |S_i| \geq \lambda \sigma \sqrt{n}\} \leq \frac{\epsilon}{\lambda^2}, \qquad\qquad n \geq n_0$$

Das Wiener Maß W

Sei $X : \Omega \to C[0,1]$.

Definition

W ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(C, \mathcal{C})$, so dass gilt

- $W\{X(t) \leq \alpha\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\alpha} e^{-u^2/2t} \mathrm{d}u \ , \ \forall t \in (0,1]$
- $W\{X(0) = 0\} = 1$
- Für den Stochastischen Prozess $\{X(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ gilt:

  Falls $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ \ldots \leq t_k \leq 1$ dann sind

  $X(t_1) - X(t_0) \ , \ X(t_2) - X(t_1) \ , \ \ldots \ , X(t_k) - X(t_{k-1})$

  unabhängig.

Brownsche Bewegung

- Sei $X(t)$ eine Koordinate der Position eines sich bewegenden Teilchens im Wasser zur Zeit t, $0 \leq t \leq 1$.
- Das Wiener Maß weist dieser Koordinate eine Verteilung zu, die die Brownsche Bewegung passend beschreibt.

Die Existenz des Wiener Maßes

Satz

Auf $(C, \mathcal{C})$ existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß W, so dass gilt

- $W\{X(t) \leq \alpha\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\alpha} e^{-u^2/2t} \mathrm{d}u \; , \; \forall t \in (0, 1]$
- $W\{X(0) = 0\} = 1$
- Für den Stochastischen Prozess $\{X(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ gilt:

  Falls $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \; \ldots \leq t_k \leq 1$ dann sind

  $X(t_1) - X(t_0)\; , \; X(t_2) - X(t_1)\; , \; \ldots \; , X(t_k) - X(t_{k-1})$

  unabhängig.

Satz von Donsker

Wiederholung

- $\xi_1, \xi_2, \ldots$ iid
- $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$
- $X_n(t,\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}(\omega) + (nt - \lfloor nt \rfloor)\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}(\omega),$
  $t \in [0,1], \quad \omega \in \Omega$

Satz von Donsker

Der Satz

Falls

- $\mathbb{E}\{\xi_n\} = 0$ und
- $Var\{\xi_n\} = \sigma^2, \qquad 0 < \sigma^2 < \infty.$

Dann gilt

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W.$$

Satz von Donsker - Beweis

Lemma

Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit

- $\mathbb{E}\{\xi_i\} = 0$ und
- $Var\{\xi_i\} = \sigma_i^2, \qquad 0 < \sigma_i^2 < \infty$.

Wir setzen

- $S_i = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_i$ und
- $s_i^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_i^2$.

Dann gilt

$$P\{max_{i \leq n}|S_i| \geq \lambda s_n\} \leq 2 \cdot P\{|S_n| \geq (\lambda - \sqrt{2})s_n\}.$$

Beispiel 1

Gaußscher Random Walk

- Zufallsvariablen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mit
- $\xi_i \sim N(0,1) \qquad\qquad i = 1, \ldots, n$

Beispiel 2

Einfacher Random Walk

- Zufallsvariablen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mit
- $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = \mathbb{P}(\xi_i = -1) = \frac{1}{2} \qquad i = 1, \dots, n$

Anwendung

Bestimmung der Verteilung von

$\max_{i \leq n} S_i$.

Anwendung

Verteilung von $\max_{i \leq n} S_i$

- $P\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{i \leq n} S_i \leq \alpha\} \to \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-u^2/2} \mathrm{d}u$

Quellen

- Convergenz of Probability Measures, Patrick Billingsley
- www.wikipedia.org