Perkolation

Christina Sander | 28.6.2010

Inhalt

Motivation

Definitionen

Kritischer Wert

Boolsches Modell

Anhang

Inhalt

Motivation

Definitionen

Kritischer Wert

Boolsches Modell

Anhang

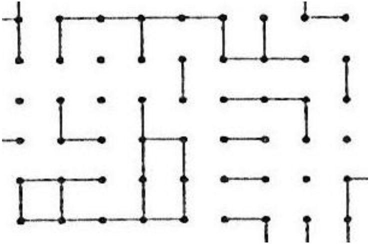
Motivation

(percolation: engl. Durchsickern)

- Flüssigkeiten, die ein poröses Material durchdringen
- elektrische Leitfähigkeit von Legierungen
- Ausbreitung von Epidemien und Waldbränden
- und viele mehr

Was ist Perkolation in der Mathematik?

Die Perkolationstheorie beschreibt das Ausbilden von zusammenhängenden Gebieten, sogenannten Clustern, auf zufälligen Graphen.



Inhalt

Motivation

Definitionen

Kritischer Wert

Boolsches Modell

Anhang

Definitionen

Graph

Ein Graph besteht aus

einer Menge von Knoten$\{x_1, ..., x_n\}$ und

einer Menge von Kanten$\{e_1, ..., e_m\}$,

wobei eine Kante stets zwei Knoten miteinander verbindet.

Definitionen

Graph

Ein Graph besteht aus

einer Menge von Knoten $\{x_1, ..., x_n\}$ und

einer Menge von Kanten $\{e_1, ..., e_m\}$,

wobei eine Kante stets zwei Knoten miteinander verbindet.

Zusammenhängend

Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn je zwei Knoten des Graphen über eine Folge von Kanten verbunden sind.
Eine zusammenhängende Komponente innerhalb eines Graphen nennt man Cluster.

Definitionen

Kantenwahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$, mit der eine Kante des Gitters geöffnet wird, nennt man Kantenwahrscheinlichkeit.

Definitionen

Kantenwahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$, mit der eine Kante des Gitters geöffnet wird, nennt man Kantenwahrscheinlichkeit.

Perkolationskonfiguration

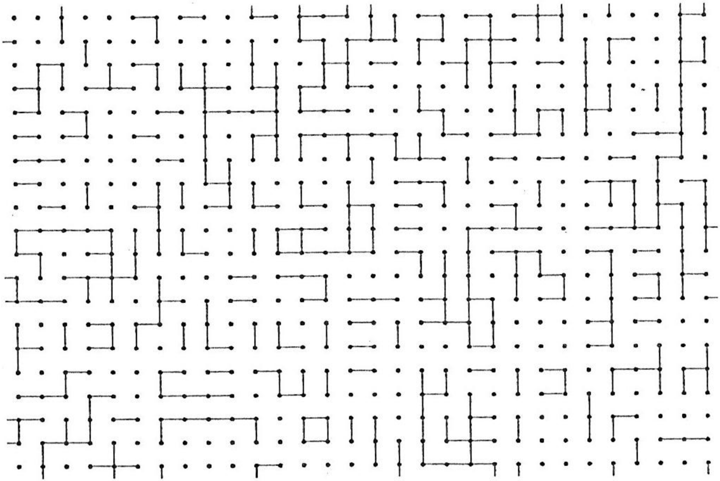
Die Menge aller offener Kanten wird Perkolationkonfiguration genannt.

Definitionen

Gitter $\mathbb{Z}^d$

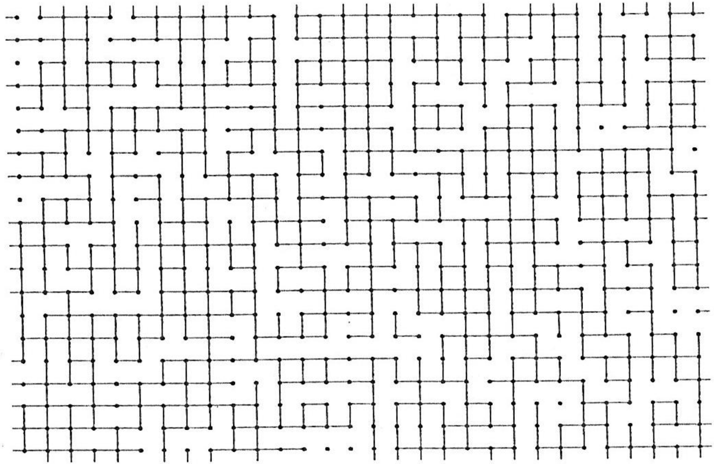
Ein Gitter ist ein Graph G mit der Knotenmenge aller ganzzahliger Knoten, wobei ein Knoten mit seinen nächsten Nachbarn über eine Kante verbunden ist.
Ist $d = 2$, dann heißt $G = \mathbb{Z}^2$ das quadratische Gitter.

Beispiel



Eine Kantenperkolation auf dem Gitter $\mathbb{Z}^2$ mit $p = 0,3$.

Beispiel



Eine Kantenperkolation auf dem Gitter $\mathbb{Z}^2$ mit $p = 0,7$.

Inhalt

Motivation

Definitionen

Kritischer Wert

Boolsches Modell

Anhang

Kritischer Wert

Zentrale Fragestellung

Ab welcher Wahrscheinlickeit erhält man einen unendlichen Cluster?

Kritischer Wert

Zentrale Fragestellung

Ab welcher Wahrscheinlickeit erhält man einen unendlichen Cluster?

Definition: Kritischer Wert

Sei $\psi(p)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Kantenperkolation auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ mit der Kantenwahrscheinlichkeit p zu einer unendlich zusammenhängenden Komponente führt. Dann nennt man p_c den kritischen Wert, wenn gilt:

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, & \text{für } p < p_c \\ 1, & \text{für } p > p_c. \end{cases}$$

Kritischer Wert

Zentrale Fragestellung

Ab welcher Wahrscheinlickeit erhält man einen unendlichen Cluster?

Definition: Kritischer Wert

Sei $\psi(p)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Kantenperkolation auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ mit der Kantenwahrscheinlichkeit p zu einer unendlich zusammenhängenden Komponente führt. Dann nennt man p_c den kritischen Wert, wenn gilt:

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, & \text{für } p < p_c \\ 1, & \text{für } p > p_c. \end{cases}$$

Satz: Kritischer Wert

Für jedes Gitter $\mathbb{Z}^d (d \geq 2)$ existiert ein kritischer Wert $p_c \in [0, 1]$.

Satz vom kritischen Wert

Satz vom kritischen Wert auf $\mathbb{Z}^2$

Sei $\psi(p)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Kantenperkolation auf dem Gitter $\mathbb{Z}^2$ mit der Kantenwahrscheinlichkeit p zu einer unendlich zusammenhängenden Komponente führt. Dann gilt:

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, & \text{für } p \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{für } p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(Beweis: Harris, 1960 und Kesten, 1980)

Abgeschwächte Form

Proposition

Für die Kantenperkolation auf dem Gitter $\mathbb{Z}^2$ existiert ein kritischer Wert p_c, für den gilt $\frac{1}{3} \leq p_c \leq \frac{2}{3}$, so dass die Wahrscheinlichkeit $\psi(p)$ für die Existenz einer unendlichen zusammenhängenden Komponente

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } p < p_c \\ 1, & \text{wenn } p > p_c \end{cases}$$

beträgt.

Äquivalente Formulierung

Lemma I

Für jedes $p < \frac{1}{3}$ gilt: $\psi(p) = 0$.

Äquivalente Formulierung

Lemma I

Für jedes $p < \frac{1}{3}$ gilt: $\quad \psi(p) = 0.$

Lemma II

Für jedes $p \geq \frac{2}{3}$ gilt: $\quad \psi(p) = 1.$

Äquivalente Formulierung

Lemma I

Für jedes $p < \frac{1}{3}$ gilt: $\quad \psi(p) = 0.$

Lemma II

Für jedes $p \geq \frac{2}{3}$ gilt: $\quad \psi(p) = 1.$

Lemma III

Für jedes p ist $\psi(p)$ entweder 0 oder 1.

Äquivalente Formulierung

Lemma I

Für jedes $p < \frac{1}{3}$ gilt: $\quad \psi(p) = 0.$

Lemma II

Für jedes $p \geq \frac{2}{3}$ gilt: $\quad \psi(p) = 1.$

Lemma III

Für jedes p ist $\psi(p)$ entweder 0 oder 1.

Lemma IV

Seien p_1 und p_2 zwei Wahrscheinlichkeiten mit $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$. Dann gilt $\psi(p_1) \leq \psi(p_2)$.

Abschätzung der kritischen Werte

Satz

Für die kritischen Werte $p_c(d)$ auf den jeweiligen Gittern $\mathbb{Z}^d$ gilt folgende Abschätzung:

$$p_c(2) \geq p_c(3) \geq p_c(4) \geq ...$$

Inhalt

Motivation

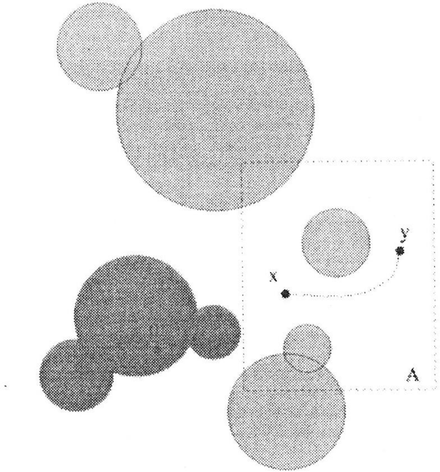
Definitionen

Kritischer Wert

Boolsches Modell

Anhang

Boolsches Modell

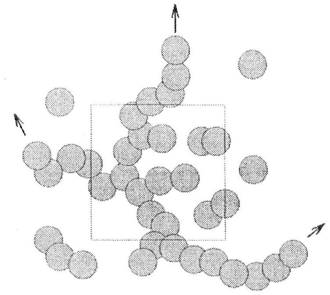


Boolsches Modell

Kritischer Wert

Für ein Boolsches Modell auf $\mathbb{R}^2$ erzeugt duch einen Poisson-Prozess, Intensität λ und Radius $r = 1$ gilt:

$$0,174 < \lambda_c < 0,843.$$



Ende

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Inhalt

Motivation

Definitionen

Kritischer Wert

Boolsches Modell

Anhang

Beweis von Lemma I

Sei $p < \frac{1}{3}$.
Z.z.: $\psi(p) = 0$. D.h., es existiert eine unendliche zusammenhängende Komponente.
Sei x ein beliebiger Knoten und habe die Koordinaten (0,0). Sei $K_n = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : -n \leq i \leq n, -n \leq j \leq n\}$, dann ist der Rand der Menge K_n:
$\partial K_n = \{(i,j) \in K_n :$ min. eine der Koordinaten i und j ist gleich -n oder n$\}$.
Sei das Ereignis, dass x in einer unendlichen zusammenhängenden Komponente liegt, mit

$$x \longleftrightarrow \infty$$

bezeichnet und mit

$$x \longleftrightarrow \partial K_n,$$

dass x in einer zusammenhängenden Komponenteliegt, die mindestens einen Knoten vom Rand enthält.

Beweis von Lemma I

Dann gilt: $\mathbb{P}(x \longleftrightarrow \infty) \leq \mathbb{P}(x \longleftrightarrow \partial K_n)$

Für die Anzahl der selbstvermeidenden Pfade der Länge n gilt:

Für die erste Kante hat man 4 Möglichkeiten und für alle folgende jeweils 3.

$\Longrightarrow$ $\exists$ min. $4 \cdot 3^{n-1}$selbstvermeidenden Pfade von x nach ∂K_n

$\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(x \longleftrightarrow \partial K_n) \leq 4 \cdot 3^{n-1} p^n = \frac{4}{3}(3p)^n$.

$\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(x \longleftrightarrow \partial K_n) = 0$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{P}(x \longleftrightarrow \infty) = 0$

$\Longrightarrow$ $\psi(p) = 0$, da x beliebig. $\square$

Beweis von Lemma II

Definition

Das zu $\mathbb{Z}^2$ gehörigen duale Gitter $\tilde{Z}^2$ wird durch ein um 0,5 sowohl nach oben als auch nach rechts verschobenes quadratisches Gitter definiert.

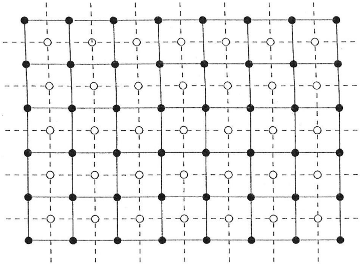


Abb.: quadratisches Gitter $\mathbb{Z}^2$ (schwarz) mit gehörigen duala Gitter $\tilde{Z}^2$ (weiss).

Beweis von Lemma II

Definition

Für jede Kante $\tilde{e}$ des Gitters $\tilde{Z}^2$ sei $\tilde{e}$ offen genau dann, wenn die Kante e des Gitters $\mathbb{Z}^2$, die $\tilde{e}$ kreuzt, geschlossen ist. Den so entstandenen Graph nennt man den dualen Perkolationsprozess.

Beachte: $\tilde{p} = (1 - p)$

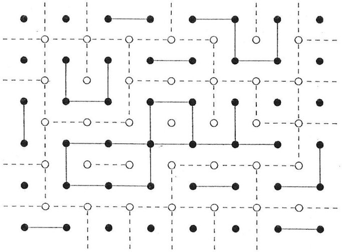


Abb.: duale Perkulationskonfiguration

Beweis von Lemma II

Definition

Ein selbstvermeidender Pfad in $\tilde{Z}^2$ heisst Kontur, wenn jeder seiner Knoten mit höchstens zwei Kanten verbunden ist und Anfangs- und Endknoten derselbe sind.Eine Kontur heisst geschlossen, wenn alle ihre Kanten vorhanden sind und sie heisst Kontur um x, wenn der Knoten x im Inneren der Kontur liegt.

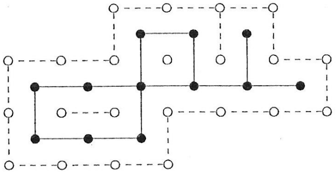


Abb.: Endliche zusammenhängende Komponente auf dem quadratischen Gitter mit umschliessender Kontur des dualen Perkolationsprozesses.

Beweis von Lemma II

Sei $p > \frac{2}{3}$.
Z.z.: $psi(p) = 1$.
Liege der Punkt 0 im Nullpunkt des Perkolationsprozesses auf $\mathbb{Z}^2$.
Dann gilt:

$\Longrightarrow$ $\exists$ min. $n \cdot 3^{n-1}$Konturen der Länge n

$\Longrightarrow$ $\exists$ min. $n \cdot 3^{n-1}(1-p)^n$geschlossene Konturen der Länge n um 0

$\Longrightarrow$ $\mathbb{E}[AnzahldergeschlossenenKonturenum0] \leq \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^{n-1}(1-p)^n$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3} \cdot (3(1-p))^n < \infty$, da $3(1-p) < 1$ für $p < \frac{2}{3}$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{P}$ (es gibt max. endlich viele geschlossene Konturen um 0) = 1 $\square$

Beweis von Lemma III

Definition

Sei A ein Ereignis, das durch endlich viele Zufallsvariablen definiert ist.
A heisst terminales Ereignis, wenn es nicht durch beliebige Änderungen endlich vieler Zufallsvarbiablen beeinflusst werden kann.

Kolmogorows 0-1-Gesetz

Seien $X_1, \dots, X_n$ unanbhängige Zufallsvariablen und sei A ein terminales Ereignis definiert durch $X_1, \dots, X_n$.
$\Longrightarrow \qquad \mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(A) = 1$.

(ohne Beweis)

Beweis von Lemma III

Z.z.: $\forall$ p: $\psi(p) = 0$ oder $\psi(p) = 1$.
Seien $e_1, e_2, e_3 \dots$ die Kanten des Gitters $\mathbb{Z}^2$ mit zugehörigen Zuvallsvariablen X_{e_i}, wobei

$$X_{e_i} = \begin{cases} 0, & \text{wenn die Kante } e_i \text{ in der Perkolationskonfiguration ist,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \mathrm{X}_{e1}, \mathrm{X}_{e2}, \dots$ sind unabhängige Zuvallsvariablen mit:

$$\mathrm{X}_{ei} = \begin{cases} 0, & \text{mit Wahrscheinlichkeit p} \\ 1, & \text{mit Wahrscheinlichkeit 1-p.} \end{cases}$$

Sei das Ereignis A = { $\exists$ eine unendliche zussammenhängende Komponente in der Perkolationskonfiguration. }
Offensichtlich ist A ein terminales Ereignis und dann folgt die Behauptung als direkte Anwendung des 0-1-Gesetz von Kolmogorow. $\square$

Beweis von Lemma IV

Sei $p_1 \leq p_2$.
Z.z.: $\psi(p_1) \leq \psi(p_2)$.
Seien $e_1, e_2, \ldots$ die Kanten des Gitters $\mathbb{Z}^2$ mit zugehörigen $U_{e_1}, U_{e_2}, \ldots$ auf [0,1] gleichverteilte Zufallsvariablen.
Seien die die zu p_1 und p_2 zugehörigen Perkolationskonfigurationen

$$X_e^{p_1} = \begin{cases} 1, & \text{für } U_e \leq p_1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$X_e^{p_2} = \begin{cases} 1, & \text{für } U_e \leq p_2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt für jede Kante e:

$$\begin{cases} X_e^{p_1} = 1 \text{ und } X_e^{p_2} = 1, & \text{wenn } U_e \leq p_1 \\ X_e^{p_1} = 0 \text{ und } X_e^{p_2} = 1, & \text{wenn } p_1 < U_e \leq p_2 \\ X_e^{p_1} = 0 \text{ und } X_e^{p_2} = 0, & \text{wenn } p_2 < U_e \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad X_e^{p_1} \leq X_e^{p_2}$$

D.h., jede Kante, die in der zu p_1 zugehörigen Perkolationskonfigurationen offen ist, ist auch in der zu p_2 zugehörigen Perkolationskonfigurationen offen.

Mit

$\psi(p_1) = \mathbb{P}($ die p_1 -Perkolationskonfigurationen beinhaltet eine unendliche zusammenhängende Komponente$)$

und

$\psi(p_2) = \mathbb{P}($ die p_2-Perkolationskonfigurationen beinhaltet eine unendliche zusammenhängende Komponente$)$

folgt dann:

$$\psi(p_1) \leq \psi(p_2). \quad \square$$

Literatur

- Olle Häggström: Streifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheoie. Springer (2006)
- Ronald Meester und Rahul Roy: Continuum Percolation. Cambridge University Press (2004)