# Zufallsfelder

Eugen Fot

15.07.2010

# Inhaltsverzeichnis

Einführung und Definitionen
- Zufallsfelder
- Stationäre Zufallsfelder
- Isotrope Zufallsfelder

Kovarianzfunktionen
- Positiv definite Funktionen
- Hinreichende Kriterien für positiv definite Funktionen

Gebräuchliche Modelle und Simulationen

# Einführung und Defintion

- *Def:* Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(S, \mathcal{B})$ ein meßbarer Raum. Ein Zufallselement $X : \Omega \to S$ ist eine $\mathcal{F}|\mathcal{B}$ meßbare Abbildung von $(\Omega, \mathcal{F})$ nach $(S, \mathcal{B})$ : $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{B}$
- Eine Familie von zufälligen Elementen $X = \{X(t), t \in T\}$, welche auf $(\Omega, \mathcal{F})$ gegeben sind , nennt man zufällige Funktionen

# Einführung und Defintion

- alle zufälligen Elemente $X(t), t \in T$, sind auf dem gleichen Meßraum $(\Omega, \mathcal{F})$ definiert, unterscheiden sich aber in ihren Werten
- man betrachtet dann die meßbaren Räume $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$
- $X = X(t, \omega)$ ist definiert auf $T \times \Omega$
- Falls $\omega$ fix ist, dann nennt man $X(\cdot, \omega)$ eine Trajektorie

# Einführung und Defintion

- $T \subset \mathbb{R}:\quad t \hat{=}$ Zeitparameter
  $X \hat{=}$ Stochastischer Prozess
- $T \subset \mathbb{R}^d, d > 1, : X \hat{=}$ Zufallsfeld

# Zufallsfelder

- Zufallsfeld X=$\{X(t,\omega) : t \subset \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega\}$
- $X(t,\cdot)$ Zufallsvariable
- $X(\cdot,\omega)$ Realisierung des Zufallsfeldes

# Gauß'sches Zufallsfeld

- falls $(X(t_1), \ldots, X(t_n))^T \sim \mathcal{N}(a, \Sigma) \Longrightarrow$ Gauß'sches Zufallsfeld

# Zufallsfelder

- *Def:* Ein Zufallsfeld $X(t, \omega)$, $t \in \mathbb{R}^d$, ist von zweiter Ordung, falls $Var\ X(t) < \infty\ \forall t \in \mathbb{R}^d$
- *Def*: Sei $X(t)$ ein Zufallsfeld zweiter Ordnung. Dann ist die Kovarianzfunktion definiert als
  $C(s,t) = \mathbb{E}\left\{[X(s) - \mathbb{E}X(s)]\,[X(t) - \mathbb{E}X(t)]\right\}$

# Stationarität

- *Def:* Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^{nd} \to \mathbb{C}$ ist translationsinvariant, falls $f(x_1+x,...,x_n+x) = f(x_1,...,x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall\ x, x_1 \cdots, x_n \in \mathbb{R}^d$
- *Def:* $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall\ t_1,\ldots,t_n \in T$ nennt man $P_{t_1,\ldots,t_n}(B_{t_1},\ldots,B_{t_n}) = P(X(t_1) \in B_{t_1},\ldots,X(t_n) \in B_{t_n})$ von $(X(t_1),\ldots,X(t_n))^T$ eine endlich-dimensionale Verteilung von $X = \{X(t), t \in T\}$

# Stationarität

- Falls $P(X(t_1+\tau) \in B_1, \cdots, X(t_n+\tau) \in B_n) = P(X(t_1) \in B_1, \cdots, X(t_n) \in B_n)\ \forall\ \tau, t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}^d\ \forall B_i \in \mathcal{B}_{t_i}\ \forall n \in \mathbb{N}$, gilt, dann heißt das Zufallsfeld stationär (im strengen Sinne)

# Stationarität

- Ein Zufallsfeld X zweiter Ordnung heißt stationär (im weiten Sinne), falls
  $(i)$ $\mathbb{E}X(t) = c \ \forall t \in \mathbb{R}^d$
  $(ii)$ $C(s,t) = C(s+\tau, t+\tau) \ \forall s,t,\tau \in \mathbb{R}^d$

# Stationarität

- *Bemerkung:* In diesem Fall reduziert sich die Kovarianzfunktion auf ein Argument: $C(s,t) = C(s-t,0) = \mathbb{E}[X(s-t)X(0)] - c^2 = C(h)$ mit h:=s-t
- stationär im weiten Sinne $\not\Longleftrightarrow$ stationär im strengen Sinne

# Stationarität

- X(t) Gauß'sches Zufallsfeld:
  X stationär im strengen Sinne $\Longleftrightarrow$ X stationär im weiten Sinne

# Isotropie

- Eine Funktion $f: \mathbb{R}^{nd} \to \mathbb{C}$ heißt rotationsinvariant, falls $f(Ax_1, \cdots, Ax_n) = f(x_1, \cdots, x_n)\ \forall x_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, \cdots, n\ \forall A \in SO(d)$

# Isotropie

- Ein Zufallsfeld heißt isotrop im strengen Sinne, falls $P(X(At_1) \in B_1, \cdots, X(At_n) \in B_n) = P(X(t_1) \in B_1, \cdots, X(t_n) \in B_n)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall B_i \in \mathcal{B}_{t_i}\ \forall A \in SO(d)$
- Ein Zufallsfeld X heißt isotrop im weiten Sinne, falls der Erwartungswert und die Kovarianzfunktion rotationsinvariant sind: $\mathbb{E}X(At) = \mathbb{E}X(t)$ und $C(As, At) = C(s, t)$

# Positiv definite Funktionen

- Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt positiv semidefinit, falls $0 \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k f(t_k - t_j)\overline{a_j}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_k \in \mathbb{R}^d,\ \forall a_k \in \mathbb{C}$
- Sei X ein Zufallsfeld zweiter Ordnung. Dann hat die Kovarianzfunktion folgende Eigenschaft: $0 \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_k C(t_k, t_j)\overline{a_j}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall a_k \in \mathbb{C}\ \forall t_k \in \mathbb{R}^d$
- $\Longrightarrow$ Die Kovarianzfunktion eines stationären Zufallfeldes im weiten Sinne ist eine positiv semidefinite Funktion

# Positiv definite Funktionen

- *Theorem*: Gegeben sei eine eine Funktion $a = a(t)$ und eine symmetrische, positiv semidefinite Funktion $r = r(s-t)$ $s, t \in T$. Dann existiert ein $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Gauß'sche Zufallsfunktion $X = X(t), t \in T$, sodass $\mathbb{E}X(t) = a(t)$ und $C(s,t) = r(s-t)$ $\forall s, t \in T$
  $\Longrightarrow$ Die Klasse der positiv semidefiniten Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ und die Klasse der Kovarianzfunktionen der stationären (im weitem Sinne) komplexwertigen Zufallsfelder auf $\mathbb{R}^d$ sind identisch

# Charakteristische Funktion

- Eine charakteristische Funktion $\varphi$ mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $\mathbb{R}^d$ ist wie folgt definiert: $\varphi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,\lambda\rangle} dP(t)$
- Bemerkung: Eine charakteristische Funktion ist positiv semidefinit.

# Positiv definite Funktionen

- *Theorem (Bochner-Khinchin)*: Eine in $0 \in \mathbb{R}^d$ stetige Funktion $C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ist eine positiv semidefinite Funktion genau dann, wenn sie die Fourier-Stieltjes-Transformierte mit einem endlichem Maß $\mu_c$ auf $\mathbb{R}^d$ ist: $C(\lambda) = \int e^{i\langle \lambda, t \rangle} \mu_c(dt) \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

# Positiv definite Funktionen

- *Korollar:* Eine in $0 \in \mathbb{R}^d$ stetige Funktion $C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist positiv semidefinit genau dann, wenn sie die Kosinustransformierte mit einem endlichem Maß $\mu_c$ auf $[0, \infty)$ ist: $C(\lambda) = \int_0^\infty cos(\langle \lambda, t \rangle) \mu_c(dt) \; \forall \lambda \in \mathbb{R}^d$

# Positiv definite Funktionen

- *Theorem (Riesz)*: Falls C eine positiv semidefinite und meßbare Funktion ist, dann gilt: $C = C_c + C_0$, wobei $C_c$ eine positiv semidefinite, stetige Funktion ist. Die Funktion $C_0$ ist positiv semidefinit und gleich 0 bzgl. dem Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^d$.
- $\Longrightarrow$ eine meßbare Funktion, welche nicht in eine stetige Funktion durch Änderung der Werte auf einer Nullmenge umgewandelt werden kann, ist keine positiv semidefinite Funktion.

- Bsp. für $C_0$ (nugget effect):
- $C_0(t) = \alpha \mathbf{1}_0(t) = \begin{cases} \alpha, & t = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

# Positiv definite Funktionen

- *Theorem (Schoenberg)*: Eine stetige und rotationsinvariante Funktion $C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist positiv semidefinit genau dann, wenn $C(x) = \varphi(\|x\|)$ wobei $\varphi$ die Hankel-Transformation ist und $\mu$ ein endliches Maß auf $[0, \infty) : \varphi(h) = \int_0^\infty \Gamma(\frac{d}{2})(\frac{2}{rh})^{\frac{(d-2)}{2}} J_{\frac{(d-2)}{2}}(rh)\mu(dr), h \geq 0$ wobei J die Besselfunktion erster Ordnung vom Grad $\frac{d-2}{2} \geq -\frac{1}{2}$ ist

# Positiv definite Funktionen

- Für die Dimensionen $d = 1, 2, 3$ gilt:
  $J_{-\frac{1}{2}} = cos(h)\sqrt{2}/\sqrt{\pi h}$
  $J_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty sin(h\ cosh\ t)dt$
  $J_{\frac{1}{2}} = sin(h) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi h}}$

# Positiv definite Funktionen

- *Theorem (Gneiting und Sasvari)*: Falls C eine positiv semidefinite, rotationsinvariante, meßbare Funktion auf $\mathbb{R}^d, d \geq 2$, dann gilt $C = C_c + \alpha \mathbf{1}_0$, wobei $C_c$ eine positiv semidefinite und stetige Funktion ist und $\alpha \geq 0$

# Hinreichende Kriterien für Positiv definite Funktionen

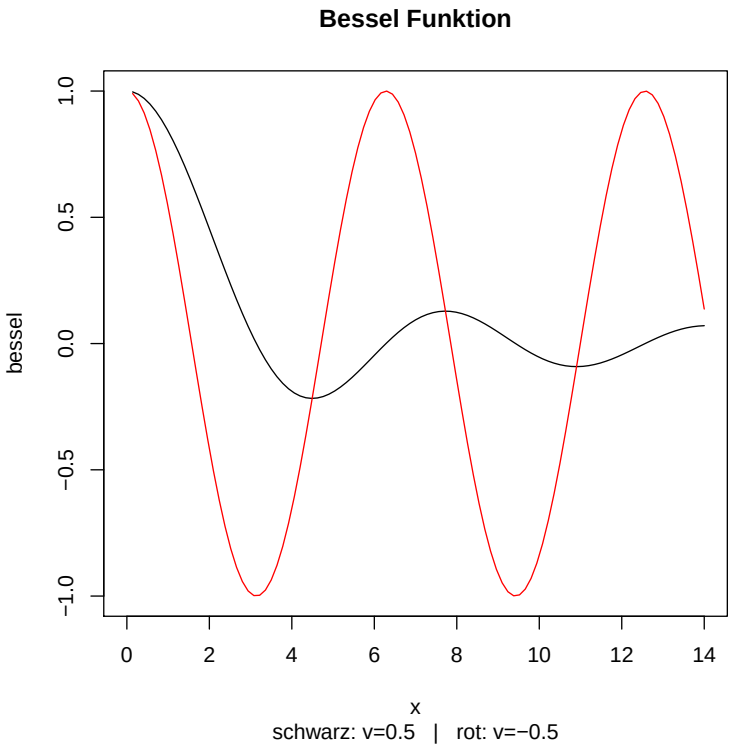
- *Pólya's Kriterium für* $\mathbb{R}^1$: Falls $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $\varphi(0) = 1, \varphi(t)$ konvex und $lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$, dann ist $\varphi(\|\cdot\|)$ eine positiv semidefinite Funktion
- Pólya's Kriterium gibt eine bequeme Methode zur Konstruktion von positiv semidefiniten Funktionen. So ist z.B $\varphi(t) = \exp^{-|t|}$ eine gültige positiv semidefinite Funktion

# Hinreichende Kriterien für Positiv definite Funktionen

- *Askey's Kriterium:* Falls $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $\varphi(0) = 1, lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$ und $(-1)^k\varphi^k(t)$ konvex für $k = \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil$, dann ist $\varphi(\|\cdot\|)$ eine positiv semidefinite Funktion auf $\mathbb{R}^d$

- Bessel-Familie (gültig für $\mathbb{R}^d$):

$$\varphi_\nu(\|t\|) = 2^\nu \Gamma(\nu+1)\|t\|^{-\nu} J_\nu(\|t\|) \quad \nu \geq \frac{(d-2)}{2}$$



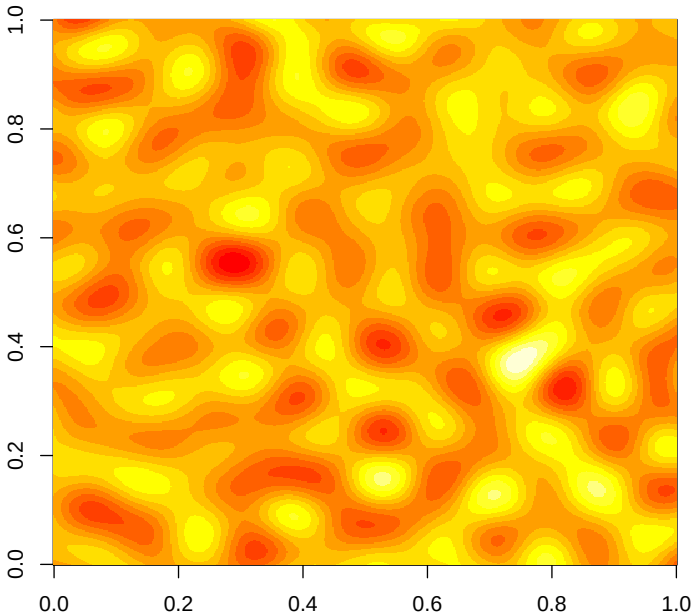



Abbildung: Bessel, $\nu = 0.5$

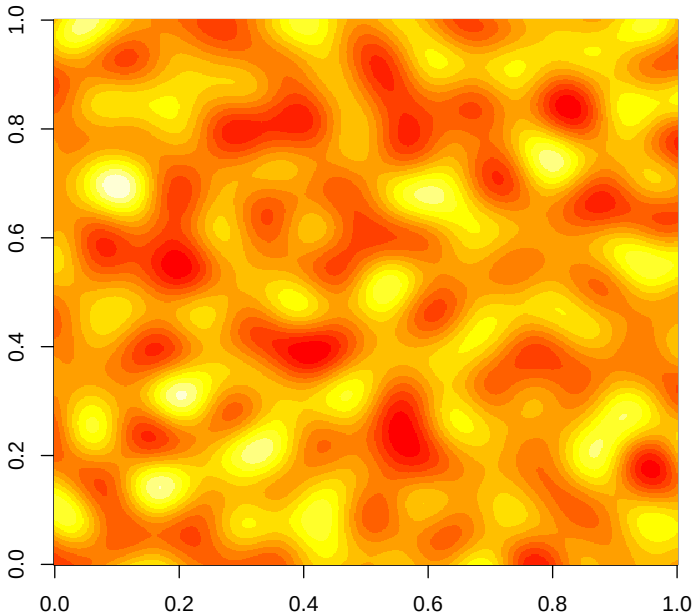



Abbildung: Bessel, $\nu = 1$

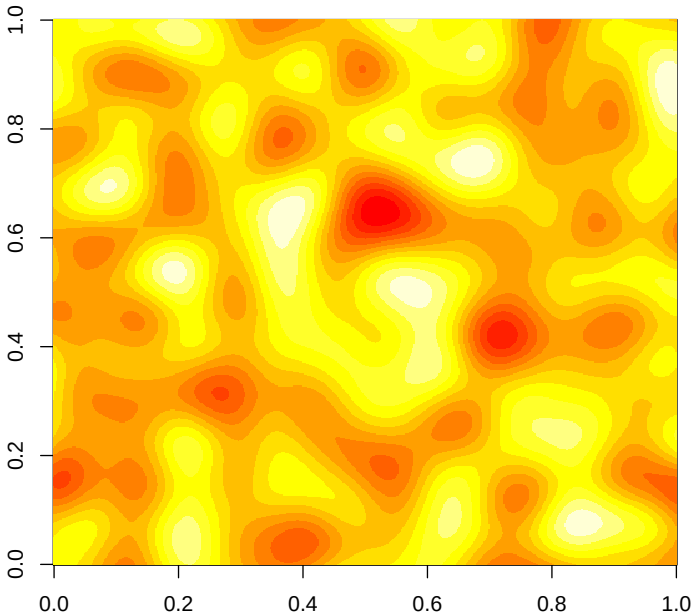



Abbildung: Bessel, $\nu = 2$

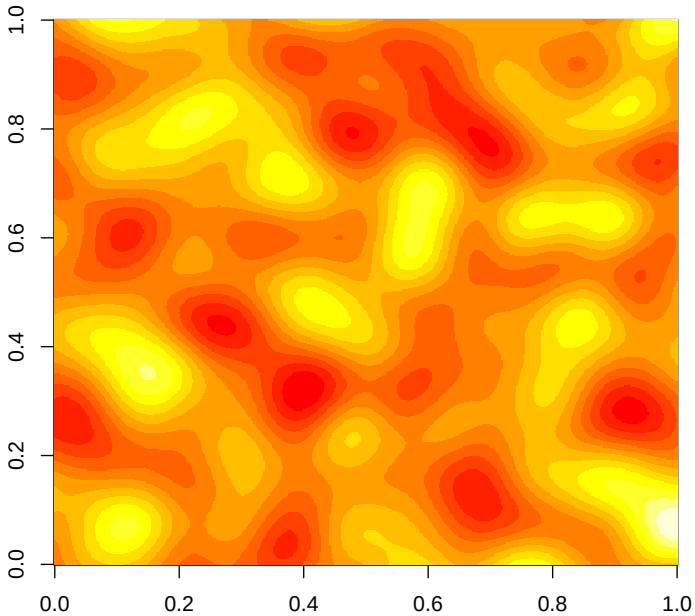
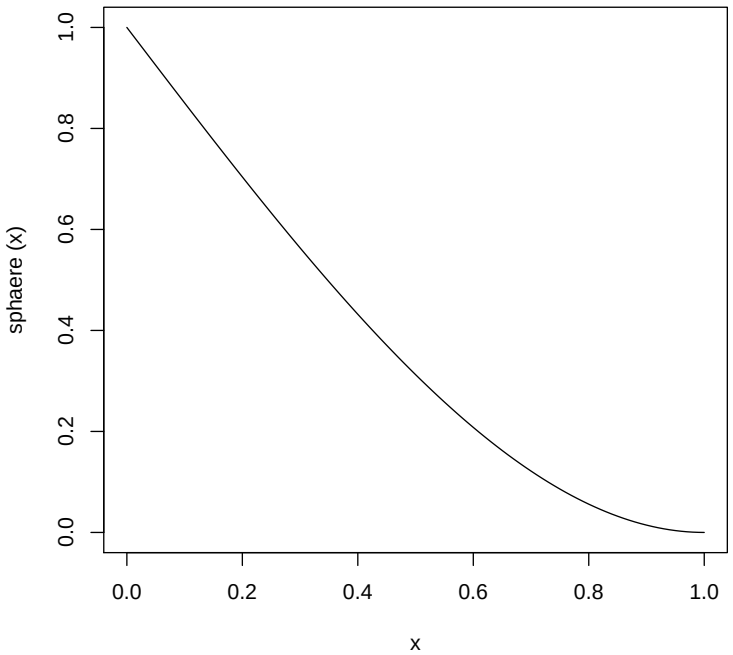



Abbildung: Bessel, $\nu = 3$

- Sphärisch (gültig für $\mathbb{R}^3$):

$$C(t) = \left(1 - \frac{3}{2}\|t\| + \frac{1}{2}\|t\|^3\right) \mathbf{1}_{[0,1]}(\|t\|)$$



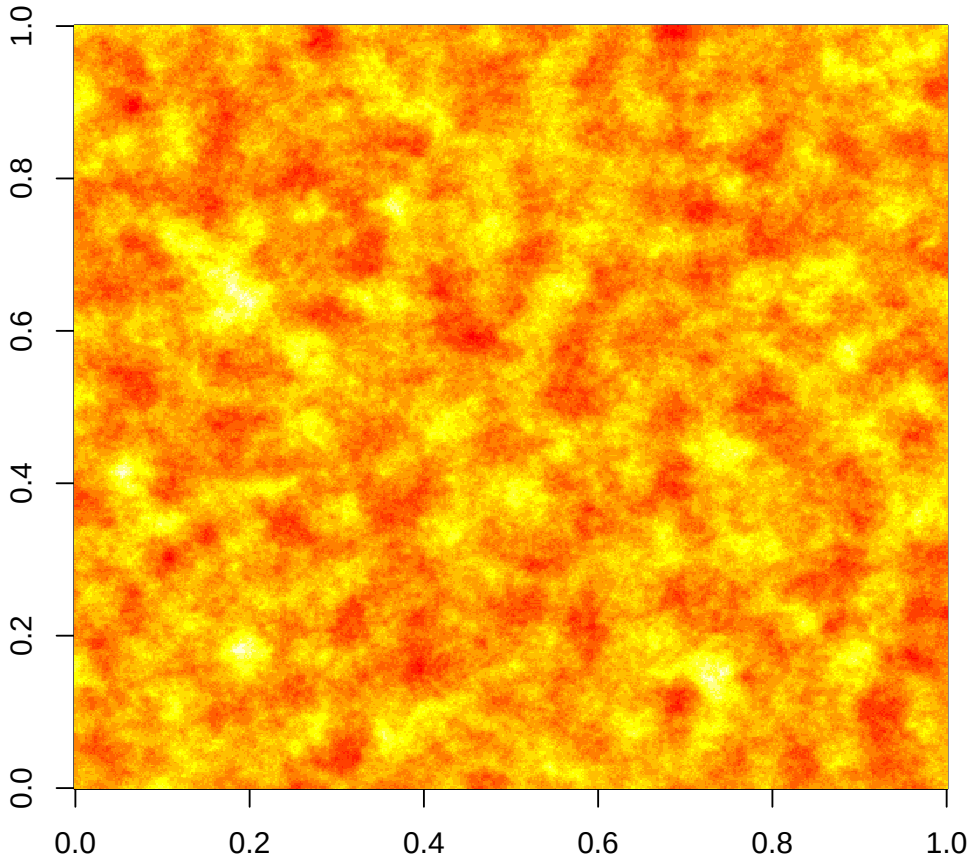



Abbildung: Sphärisch

- Weißes Rauschen:

$$C(x) = \mathbf{1}_0(h) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

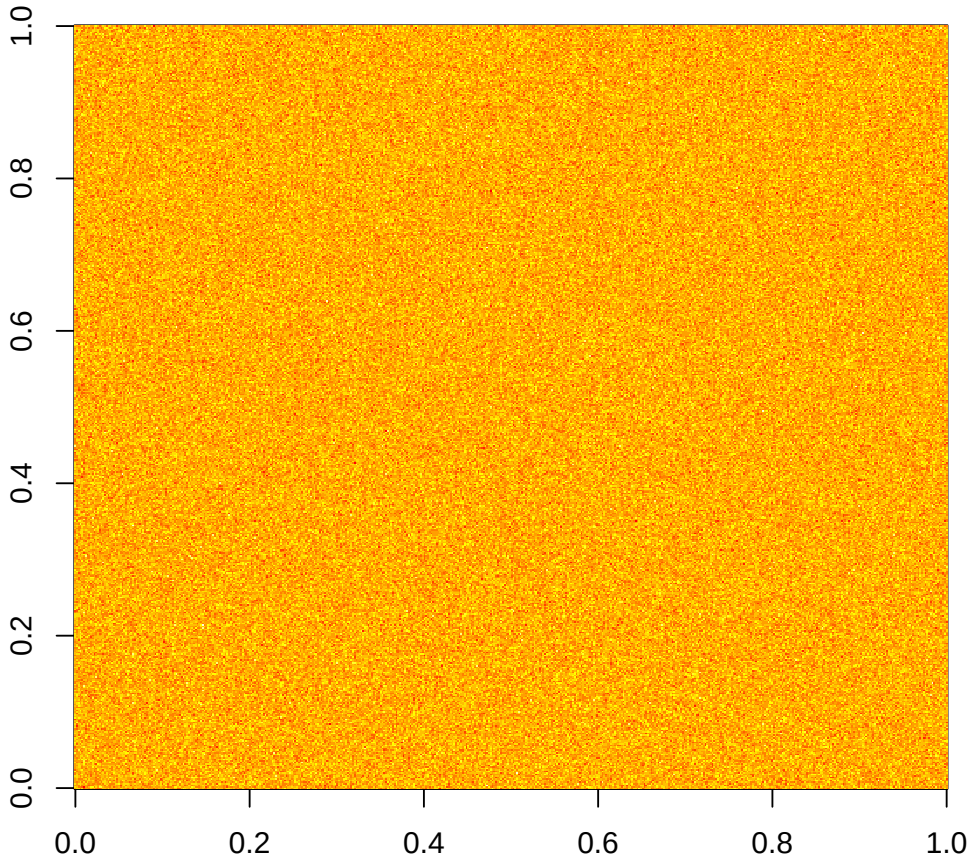
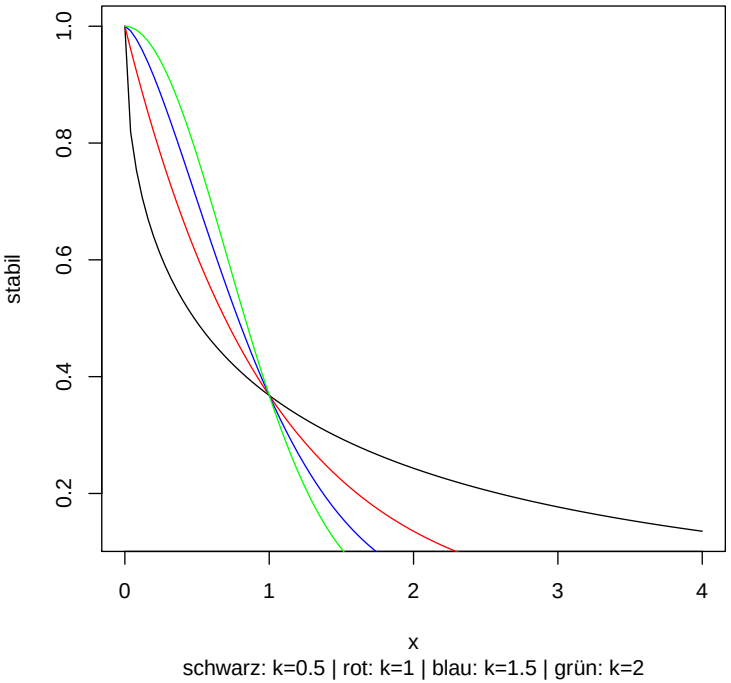



Abbildung: Weißes Rauschen

- stabil:

$$C(t) = \exp(-\|t\|^{\kappa}), \quad \kappa \in (0, 2]$$



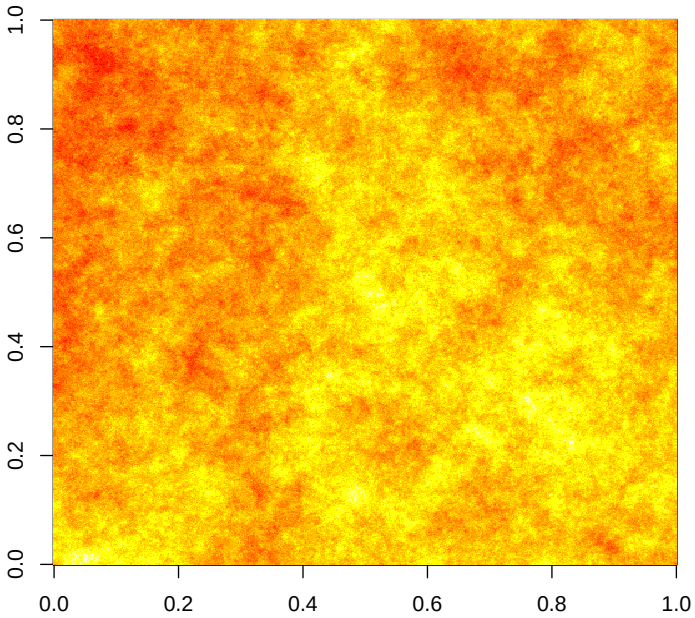



Abbildung: stabil, $\kappa = 0.5$

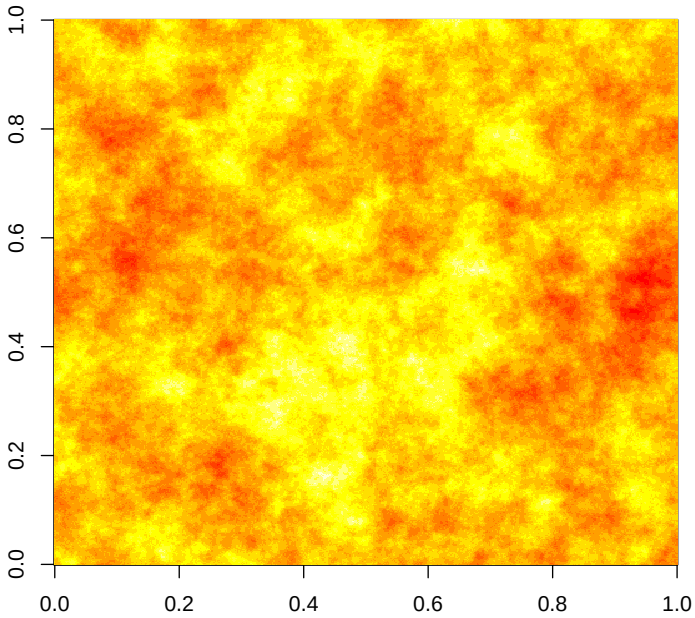



Abbildung: stabil, $\kappa = 1$

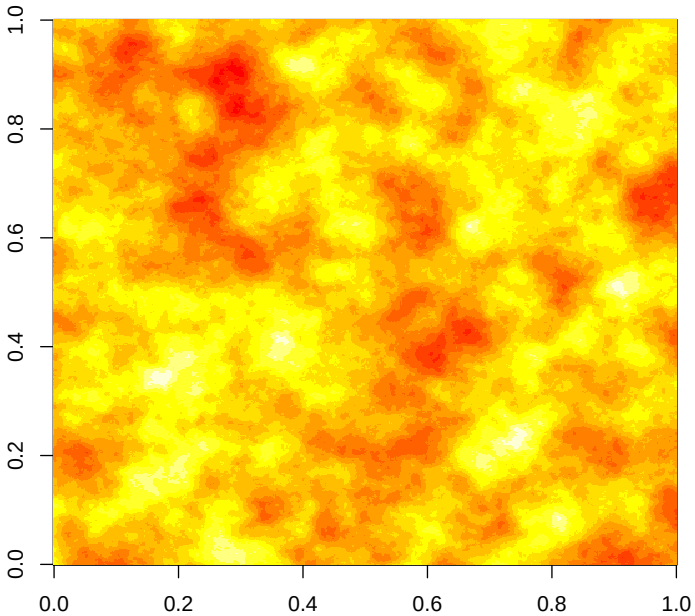



Abbildung: stabil, $\kappa = 1.5$

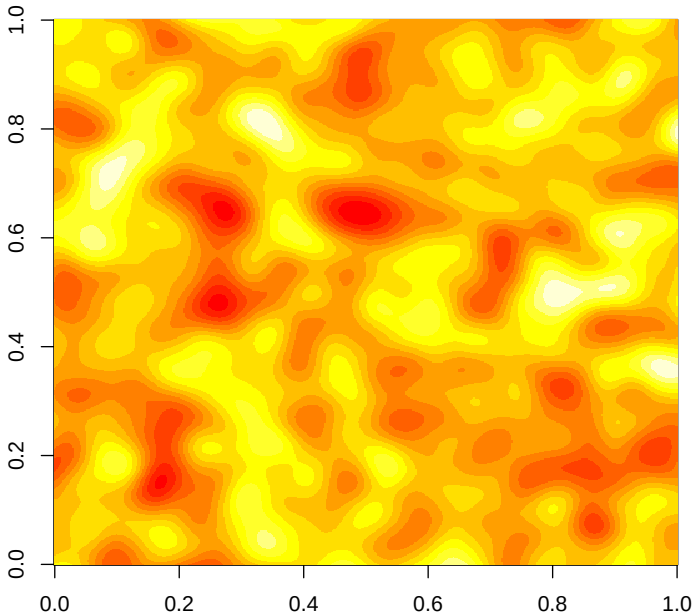



Abbildung: stabil, $\kappa = 2$

# Literaturverzeichnis

A.V.Bulinski, A.N.Shiryaev: *Theorie stochastischer Prozesse (in russ. Sprache)* , Fizmalit, 2004.

Schlather, Martin: *Introduction to Positive Definite Functions and Unconditional Simulation of Random Fields* , Technical Report ST-99-10, 1999.

Spodarev, Evgeny: *Random Fields* , Lecture Notes, Ulm 2009.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit