Brownsche Bewegung und Satz von Donsker

Matthias Möckel

02.06.2010

Inhalt des Vortrags:

historische Betrachtung

hinleitende Theoreme

Wiener Maß und Beweis der Existenz

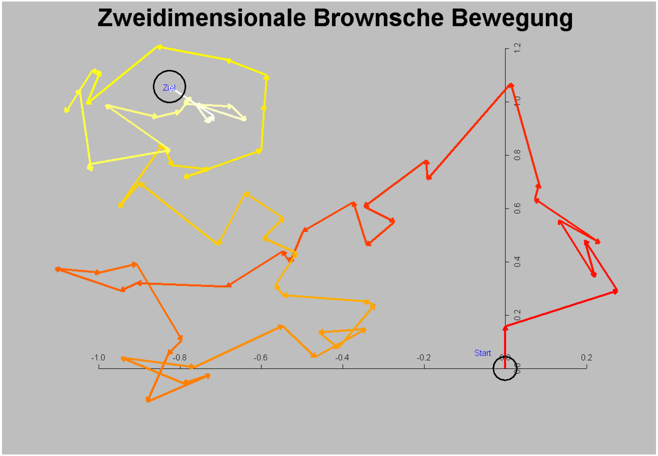
Brownsche Bewegung

Satz von Donsker mit Beweis

Anwendung des Satzes von Donsker

historische Entstehung

1827 Robert Brown betrachtet Pollen im Wasser
1923 mathematische Formulierung von Norbert Wiener


Zweidimensionale Brownsche Bewegung
Ziel
Start
-1.0
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.0
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2

Distanz zwischen zwei Funktionen x und y mit t $\in$ [0,1]

$$\rho(x,y) = \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)|$$

Stetigkeitsmaß für x ∈ C:

$$w(x,\delta) = \sup_{|s-t|<\delta} |x(s) - x(t)|, 0 < \delta \leq 1$$

Theorem 0: Straffheit

Folge $\{P_n\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist straff $\Longleftrightarrow$

(i) $\forall \eta > 0 \;\; \exists$ a $\in \mathbb{R}$, sodass

$$P_n\{x : |x(0)| > a\} \leq \eta \text{ , } n \geq 1$$

(ii) $\forall \eta > 0, \epsilon > 0 \;\; \exists \;\; 0 < \delta < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$P_n\{x : |w(x,\delta)| > \varepsilon\} \leq \eta \text{ , } n \geq n_0$$

Theorem 1:

Wenn P_n, P Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(C, \mathcal{C})$ sind
und die endlichdimensionalen Verteilungen von P_n gegen die von P konvergieren und $\{P_n\}$ ist straff.
Dann $\mathsf{P}_n \Longrightarrow \mathsf{P}$.

zufällige Funktionen

$X : (\Omega\ ,\mathcal{B}, P) \to$ C
$X(t)$ ist reelle Funktion auf Ω mit Wert $X(t, \omega)$ in ω
$X(\omega) \in$ C für festes ω

Vektorschreibweise

$(X(t_1), ..., X(t_k))$: $\Omega \to \mathbb{R}^k$

Folgerung aus Theorem 0

$\{X_n\}$ sei Folge zufälliger Funktionen

$\{X_n\}$ ist straff genau dann, wenn gilt:

(i) $\{X_n(0)\}$ ist straff

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \eta > 0 \;\; \exists \;\; 0 < \delta < 1, n_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt:
$P\{w(X_n, \delta) \geq \varepsilon\} \leq \eta \;, \; n \geq n_0$

eine Konstruktion von X$_n$

ξ_1,ξ_2,... seien ZV auf (Ω , $\mathcal{B}$, P)

S_n := ξ_1 + ... + ξ_n , S_0 = 0

Für $\frac{i}{n} \in$ [0,1] mit i$\in$ $\{0, ..., n\}$ setze:

$X_n(\frac{i}{n}, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_i(\omega)$

Für Stellen dazwischen wird $X_n(t, \omega)$ linear interpoliert:

(1) $X_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}(\omega) + (nt - \lfloor nt \rfloor) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}(\omega)$

Theorem 2:

$\{X_n\}$ definiert wie in (1)
$\{X_n\}$ ist straff,

falls $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ \lambda > 1$, $\ n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq n_0$ gilt:

$P\{\max_{i \leq n} |S_i| \geq \lambda\sqrt{n}\} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2}$

stochastischer Prozess

Sei $\{X(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ ein stochastischer Prozess
dieser existiert, falls W-Maß P auf $(C, \mathcal{C})$ existiert
t ist Zeit und X(t) Koordinatenvariable bzw. Funktion
Verteilung von X(t) hängt von P ab

Das Wiener Maß

Wiener Maß ist Wahrscheinlichkeitsmaß mit folgenden 2 Eigenschaften unter W:

(i) X(t) $\sim$ N(0,t)

$$W\{X(t) \leq \alpha\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{\frac{-u^2}{2t}} du \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$W(X(0) = 0) = 1,\ t > 0$$

(ii) $\{X(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ hat unabhängige Zuwächse:

Für $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_k \leq 1$ gilt:

die ZV $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, ... , $X(t_k) - X(t_{k-1})$ sind unabhängig

Erklärung

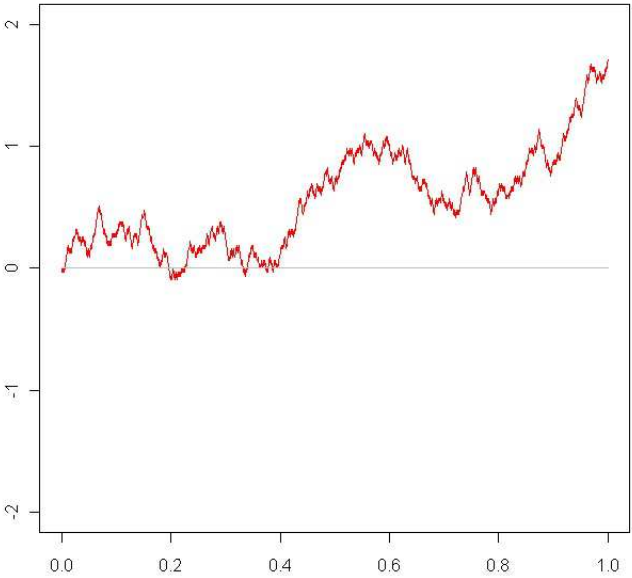
X(t) ist Koordinate eines Partikels zur Zeit t
X entspricht zurückgelegtem Pfad (von t=0 zu t=1)
Wiener Maß gibt Pfaden eine Verteilung gemäß Beschreibung der Brownschen Bewegung

Theorem 3

Auf $(C, \mathcal{C})$ gibt es Wahrscheinlichkeitsmaß W, das die Anforderungen des Wiener Maßes erfüllt.

Brownsche Bewegung

W bezeichnet auch Zufallselement mit Werten aus C und Wiener Maß als Verteilung
W(t) Wert der Zufallsfunktion W an Stelle t
$\{W(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ ist stochastischer Prozess mit stetigen Pfaden
$\rightarrow$ Wiener Prozess (Brownsche Bewegung)


2
1
0
-1
-2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Wiederholung der Konvergenz in Verteilung

Es seien X, $X_1, X_2, \dots : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen.
Dann gilt:

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff \lim_{n\to\infty} F^{X_n}(x) = F^X(x) \qquad \forall x \in C(F^X)$$

Satz von Donsker

ξ_1,ξ_2,... seien ZV auf (Ω , B, P)

ξ_i iid und E(ξ_i)=0, Var(ξ_i)= σ^2

S_n := ξ_1 + ... + ξ_n , S_0 = 0

$$X_n(t,\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}(\omega) + (nt - \lfloor nt \rfloor)\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}(\omega)$$

Dann gilt $X_n \xrightarrow{d} W$

Anwendung

Berechnung der Grenzverteilung von $\underset{i \leq n}{max} S_i$

mit Hilfe des Satzes von Donsker

h:C $\rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \underset{t \in [0,1]}{sup}\ x(t)$ stetig auf C

aus $X_n \xrightarrow{d} W$ folgt $\underset{t \in [0,1]}{sup}\ X_n(t) \xrightarrow{d} \underset{t \in [0,1]}{sup}\ W(t)$

mit $\underset{t \in [0,1]}{sup}\ X_n(t) = \underset{i \leq n}{max} \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} S_i$ gilt:

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \underset{i \leq n}{max} S_i \xrightarrow{d} \underset{t \in [0,1]}{sup}\ W(t)$$

Anwendung

Betrachtung des Spezielfalls:

Seien $S_0, S_1, \ldots$ ZV für symmetrischen Random Walk:

ξ_i sind unabhängig und

$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2} \;\; \forall \;\; i \in \mathbb{N}$

Bezeichnung: $M_i := \max\limits_{0 \leq j \leq i} S_j$

Anwendung - Reflexionsprinzip

$$P\{M_n \geq a, S_n < a\} = P\{M_n \geq a, S_n > a\}$$

Alle 2^n möglichen Pfade haben Eintrittswahrscheinlichkeit 2^{-n}.
Gleichung bewiesen, wenn man zeigt, dass

Pfadanzahl auf linker Seite = Pfadanzahl auf rechter Seite

Pfade werden an a gespiegelt

Anwendung

Zu zeigen: für $a \geq 0$ gilt:

$$P\{\max_{0 \leq i \leq n} S_i \geq a\} = 2P\{S_n > a\} + P\{S_n = a\}$$

$a = 0$ klar, da Start in 0

für $a > 0$ folgt die Gleichung aus

$$\begin{aligned} P\{M_n \geq a\} - P\{S_n = a\} = {} & P\{M_n \geq a, S_n < a\} \\ & + P\{M_n \geq a, S_n > a\} \end{aligned}$$

$$P\{M_n \geq a, S_n > a\} = P\{S_n > a\}$$

$$P\{M_n \geq a, S_n < a\} = P\{M_n \geq a, S_n > a\}$$

Anwendung

Sei $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ und $a_n := -\lfloor -\alpha\sqrt{n} \rfloor$

Einsetzen in $P\{\max_{0 \leq i \leq n} S_i \geq a\} = 2P\{S_n > a\} + P\{S_n = a\}$ ergibt

$$P\{\max_{i \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} S_i \geq \alpha\} = 2P\{S_n > a_n\} + P\{S_n = a_n\}$$

Nach ZGWS gilt: $P\{S_n \geq a_n\} \to P\{N \geq \alpha\}$ mit $N \sim N(0,1)$

Außerdem gilt $P(S_n = a_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Daraus folgt: $P\{\max_{i \leq n} \frac{1}{\sqrt{n}} S_i \geq \alpha\} \longrightarrow 2P\{N \geq \alpha\}$, $\alpha \geq 0$

Mit $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{i \leq n} S_i \xrightarrow{d} \sup_{t \in [0,1]} W(t)$

folgt daraus: $P\{\sup_{t \in [0,1]} W(t) \leq \alpha\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{1}{2}u^2} du$, $\alpha \geq 0$

Anwendung - allgemeiner Fall

ξ_i iid, E(ξ_i)=0, Var(ξ_i)=σ^2

Im allgemeinen Fall gilt: $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{i \leq n} S_i \xrightarrow{d} \sup_{t \in [0,1]} W(t)$

Zusammen mit $P\{\sup_{t \in [0,1]} W(t) \leq \alpha\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{1}{2}u^2} du,\ \alpha \geq 0$

folgt daraus: $P\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{i \leq n} S_i\} \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{1}{2}u^2} du,\ \alpha \geq 0$

Quellen

- Patrick Billingsley: *Convergence of Prabability Measures*
- Wikipedia: *Brownsche Bewegung*
- Wikipedia: *Wiener-Prozess*