ulm university universität ulm

Historische Wurzeln der stochastischen Geometrie

Matthias Wehmer | April 2010 |

Inhalt dieser Präsentation

- 1. Buffonsches Nadelproblem
- 2. Bertrandsches Paradoxon
- 3. Definition zufälliger Geraden

1. Buffonsches Nadelproblem

- a. Übersicht/Fragestellung
- b. Zwei Lösungen im Überblick

Fragestellung

- 1777 von Georges Louis Leclerc, Graf von Buffon gestellt
- eines der ältesten Probleme der stochastischen Geometrie

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig auf ein liniertes Blatt Papier geworfene Nadel eine der Linien kreuzt?

Relevante Größen:

- Länger der Nadel l
- Abstand der Gitterlinien d

Es wird der Fall $l \leq d$ betrachtet.

Zwei Lösungen im Überblick

a.) *Idee*: Darstellung der Nadel (Strecke der Länge *l*) mit Hilfe zweier Parameter:

- $\xi = (\xi_1, \xi_2)$: Anfangspunkt, nur ξ_2 relevant
- θ : Winkel zwischen Nadel und *x*-Achse

$\Rightarrow$ Darstellung einer zufälligen Strecke:

$$(\xi_2, \theta), \quad \xi_2 \sim U[0, d], \ \theta \sim U[0, \pi)$$

$$|g| = l \sin(\alpha)$$

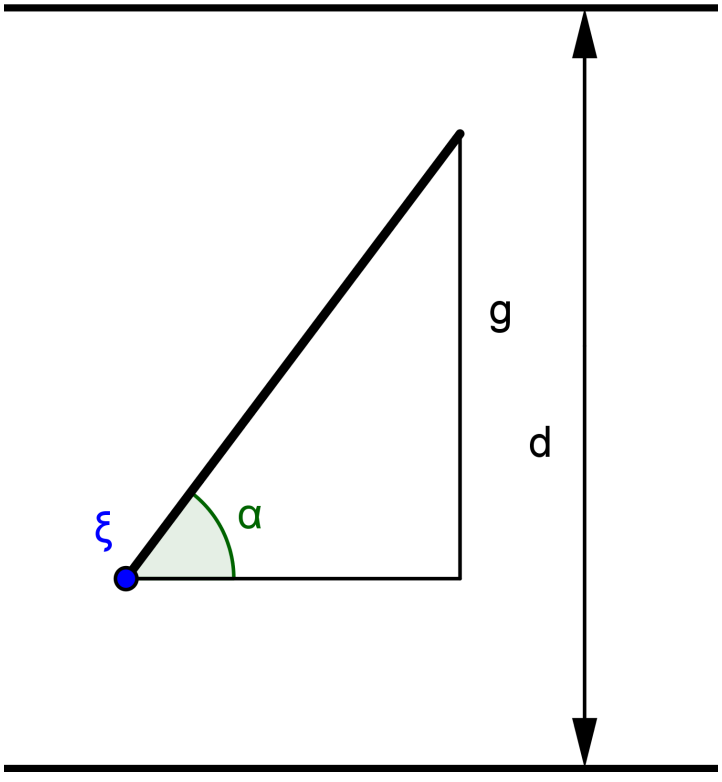

Abb.1

$\Rightarrow$ Für festes $\theta = \alpha$:
Nadel kreuzt Gitterlinie $\Leftrightarrow$ $\xi_2 \in [d - l\sin(\alpha), d]$

$$P(\textit{Nadel kreuzt Linie}) = \frac{|\text{günstige Menge im Parameterraum}|}{|\text{Parameterraum}|}$$

$$= \frac{1}{d\pi} \int_0^{\pi} l \cdot \sin(\alpha) d\alpha$$

$$= \frac{2l}{\pi d}$$

b.) *Idee:* Betrachtung einer ZV

$$X = \#\text{Überschneidungen einer Nadel}$$

$\Rightarrow$ $E(X)$ = #Erwartete Überschneidungen

$\Rightarrow E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$\Rightarrow E(X)$ hängt von der Länge der Nadel ab: $E(X) = E(l)$

$\Rightarrow$ [*induktiv* :]$E(nX) = nE(X)$

$\Rightarrow E(l) = E(1) \cdot l =: c \cdot l$

Approximation eines Kreises K mit Durchmesser d durch Polygonzug.

$$X = \#\text{Überschneidungen von } K \text{ und Gitterlinien}$$

$$\Rightarrow 2 = E(X) = E(\pi d) = c\pi d$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{2}{\pi d}$$

Im Fall $l \leq d$:

$$E(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

$$\Rightarrow p = E(X) = c \cdot l = \frac{2l}{d\pi}$$

Bertrandsches Paradoxon

Problem:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Kreissehne s länger ist als die Seite des gleichseitigen Dreiecks, dessen Eckpunkte auf dem Kreis liegen?

(Joseph Louis Bertrand, 1889)

Grundidee:

- Parametrisierung der Sehne
- Randomisierung der Parameter

Betrachtung des Einheitskreises $\Rightarrow$ Gesucht: $P(\mathit{Sehne} \geq \sqrt{3})$

1. Ansatz:

Wähle die zwei Punkte zufällig auf der Kreislinie:
$x, y \sim U[0, 2\pi)$

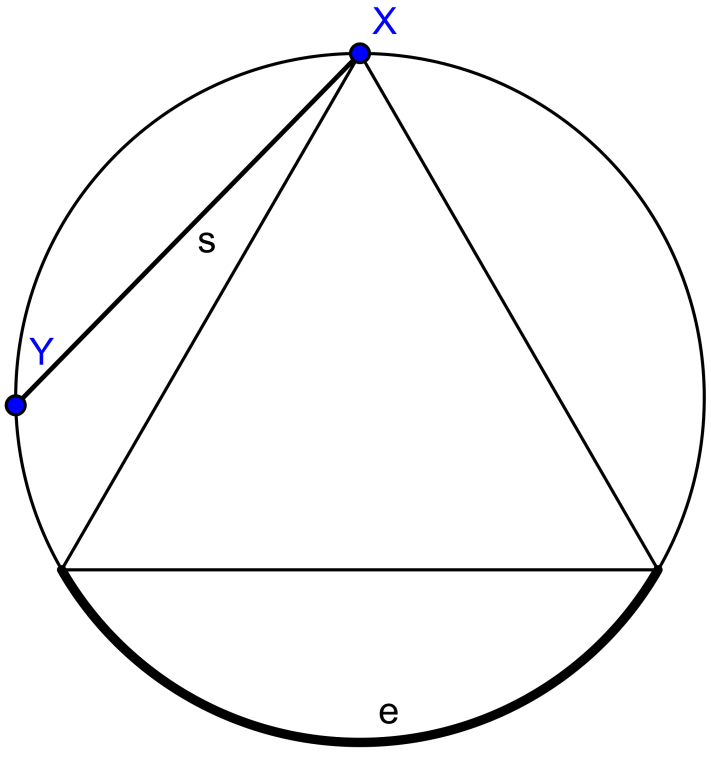

Abb.2

Gesucht: $A = \{(x, y) \in \Omega : |s| \geq \sqrt{3}\} \subset \Omega = [0, 2\pi)^2$
Beachte: x, y enstprechen Winkel im Bogenmaß

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq |\sin(\Phi)|, \quad \Phi = |\frac{x-y}{2}|$$

$$\Leftrightarrow \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) \leq |\frac{x-y}{2}|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq |\frac{x-y}{2}| \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow P(\mathit{Sehne} \geq \sqrt{3}) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2\pi \cdot \frac{2}{3}\pi}{(2\pi)^2} = \frac{1}{3}$$

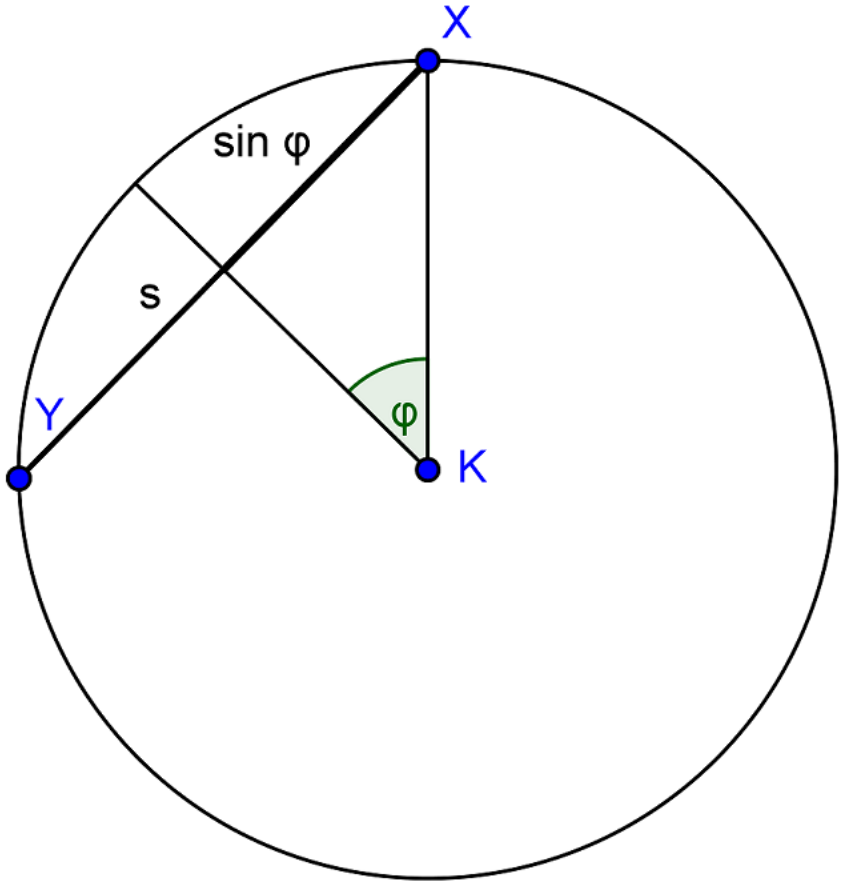

Abb.3

2. Ansatz:

Wähle Richtung $r \sim U[0, \pi)$ und auf r einen Schnittpunkt M ($M \sim U[-1, 1]$), sodass $r \perp s$.

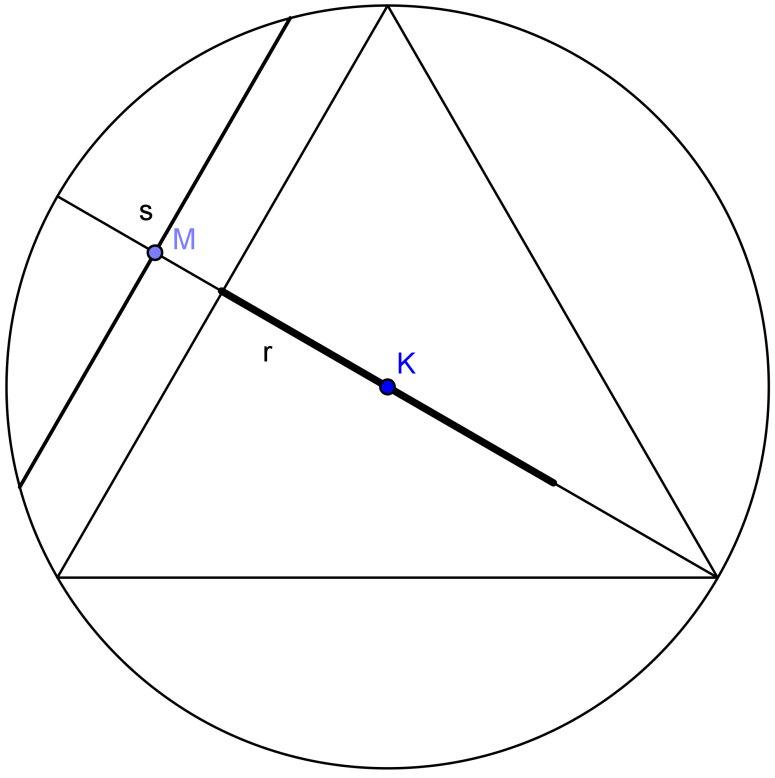

Abb.4

$$\textit{Gesucht: } A = \{(r, M) \in \Omega : |s| \geq \sqrt{3}\} \subset \Omega = [0, \pi) \times [-1, 1]$$

Mit Satz des Pythagoras:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{1 - M^2}$$

$$\Leftrightarrow |M| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(\textit{Sehne} \geq \sqrt{3}) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

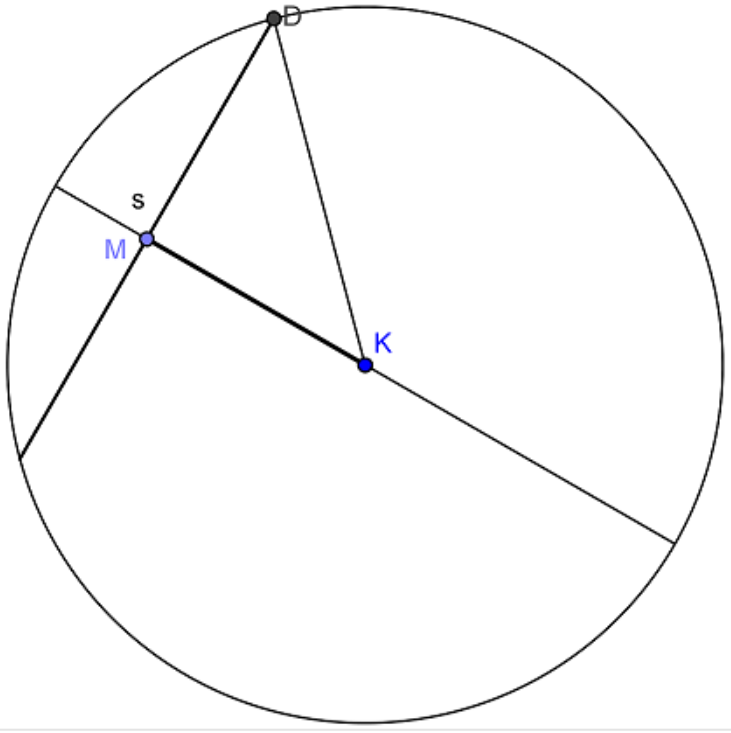

Abb.5

Fazit

Fehlende Informationen in der Problemstellung
$\Rightarrow$ keine eindeutige Parametrisierung
$\Rightarrow$ keine eindeutige Lösung

Zufällige Geraden

- a. Maß auf Menge der Geraden
- b. Zufällige Geraden und konvexe Mengen

Maß auf Menge der Geraden

Jede Gerade im $\mathbb{R}^2$ lässt sich eindeutig mit zwei Parametern darstellen:

- $p =$ Abstand vom Ursprung
- $\Phi =$ Winkel zwischen der Normalen und x-Achse

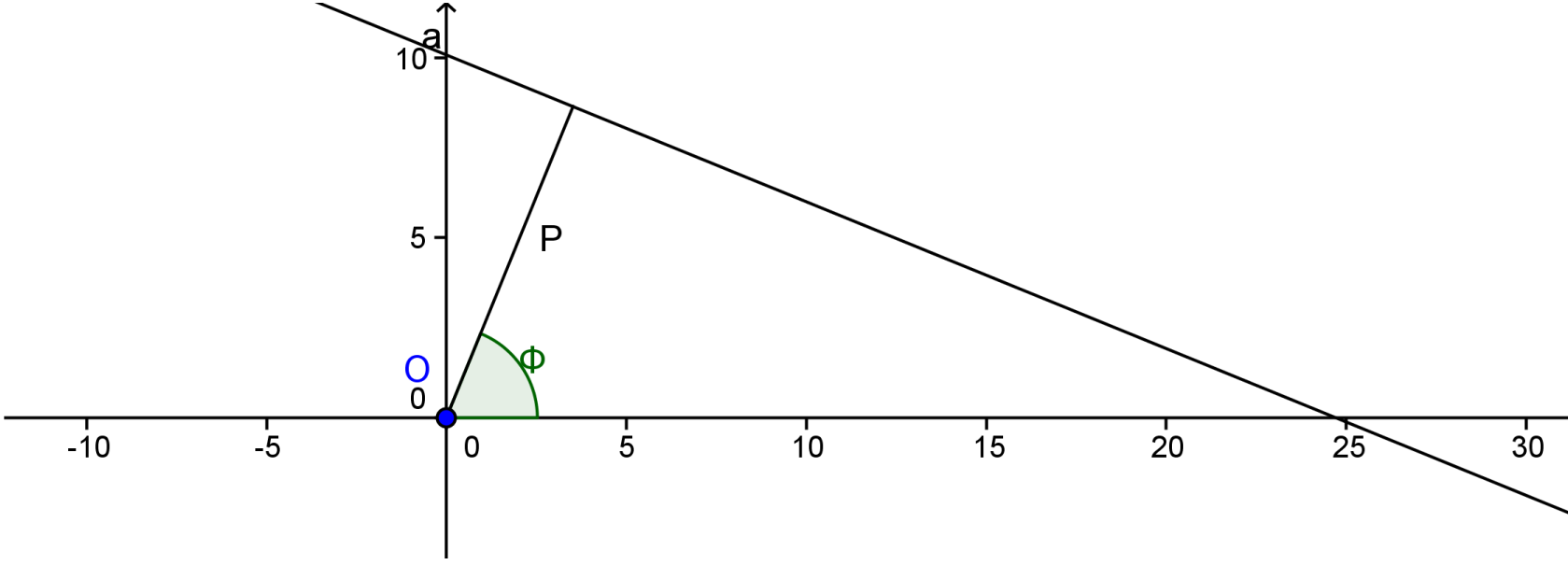

Abb.6

$\Rightarrow$ *Geradengleichung in HNF* : $x\cos(\Phi) + y\sin(\Phi) - p = 0$

Definition:

Das Maß einer Menge X von Geraden $G(p, \Phi)$ ist definiert als das Integral

$$\int_X dG = \int_X \lambda dp d\Phi$$

wobei wir $dG = \lambda dp d\Phi$ die Dichte nennen.

Sei von nun an $\lambda = 1$.

Eigenschaften

- Maß ist proportional zum Lebeque-Maß im Parameterraum $\mathbb{R} \times [0, \pi)$
- Menge von Geraden heißt messbar $\Leftrightarrow$ Menge der Parameter stellt Borel-Menge dar.
- Maß ist translationsinvariant, d.h. für Menge X von Geraden und Verschiebung $a + X$ gilt

$$\int_X dG = \int_{a+X} dG$$

Anwendungsbeispiel:

- Sei D ein Bereich in einer Ebene mit Flächeninhalt F.
- Sei G eine Gerade, die D durchläuft.
- Sei σ die Länge der Sehne in $D \cap G$.

Für Menge von Geraden E=$\{$G(p,Φ) : $p \in \mathbb{R},\ \Phi \in [0, \pi)$ fest$\}$:

$$\int_{E \cap D \neq 0} \sigma dG = \int_{E \cap D \neq 0} \sigma dp = F$$

$\Rightarrow$ Für Menge aller Geraden G=$\{$G(p,Φ) : $p \in \mathbb{R},\ \Phi \in [0, \pi)\}$:

$$\int_{G \cap D \neq 0} \sigma dG = \int_{G \cap D \neq 0} \sigma dp d\Phi = \pi F$$

Umformung von Parametern

Bei der Wahl anderer Parameter lässt sich die Dichte entsprechend umformen, z.B.

- $\theta =$ Winkel Gerade mit x-Achse
- $x =$ Länge zwischen Ursprung und Schnittpunkt x-Achse

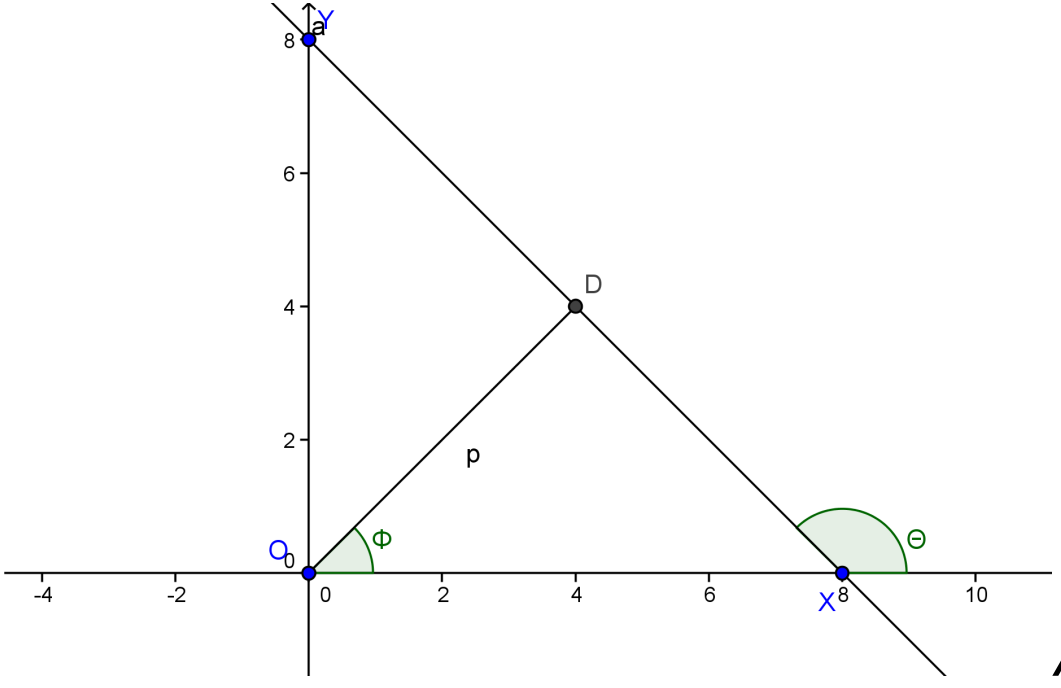

Abb.7

$$\Rightarrow p = x \sin(\theta),\ \Phi = \theta - \tfrac{\pi}{2}$$

Durch Substitution folgt:

$$\begin{aligned} \int dG &= \int \int dp d\Phi \\ &= \int \int \sin\theta \; dx d\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dG = \sin\theta \; dx d\theta$$

Geraden und konvexe Mengen

Betrachte

$$\Phi(K) = \int_{G \cap K \neq 0} dG$$
$$= \int \chi(G \cap K) dG$$

wobei K eine konvexe Menge und

$$G = \{G(p, \Phi) : p \in \mathbb{R},\ \Phi \in [0, \pi)\}$$

die Menge aller Geraden.

$\Phi(\cdot)$ ist stetig, bewegungs-invariant, additiv bzgl. konvexer Mengen.

$\Rightarrow$ [nach Hadwiger's characterization theorem]:

Es existieren $A(K),\ U(K),\ \chi(K)$ (Flächeninhalt, Umfang, Euler-Charakteristik):

$$\Phi(K) = c_1 A(K) + c_2 U(K) + c_3 \chi(K)$$

$\Phi(\cdot)$ ist eine homogene Funktion ersten Gerades

$\Rightarrow c_1 = 0, c_3 = 0$

$\Rightarrow \Phi(K) = c_2 U(K)$

Betrachte den Einheitskreis M:

$$\Phi(M) = \int_{G \cap M \neq 0} dG = \int_0^{2\pi} \int_0^1 dp d\Phi = 2\pi$$

Außerdem: $U(K) = 2\pi$

$$\Rightarrow \int \chi(G \cap K) dG = U(K)$$

Als geometrische Wahrscheinlichkeit folgt für $K \subset M$:

$$P(\textit{Gerade trifft } K | \textit{Gerade trifft } M) = \frac{U(K)}{U(M)}$$

Quellen

- N. Aigner, G. M. Ziegler, *Das Buch der Beweise.* Springer (2009)
- J. Gärtner, *Vorlesungsskript WR I.* TU Berlin (2007)
- D. A. Klain, G.-C. Rota *Introduction to Geometric Probability.* Cambridge University Press (1997)
- I. Molchanov, *Springer Beitrag*
- L. Santalo, *Integral geometry and geometric probability.* Cambridge Mathematical Library (2004)