ulm university universität uulm

Allgemeine Punktprozesse

Michael Auchter | 17. Mai 2010 |

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Zufällige Zählmaße

- $\mathbb{N} := \{\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \{0, 1, ...\} \cup \{\infty\} \mid$
  φ ist ein lokal endliches Zählmaß$\}$
- Sei $\mathcal{N}$ die kleinste σ-Algebra von Teilmengen von $\mathbb{N}$, so dass $\varphi \mapsto \varphi(B)$ für jedes $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ eine $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-messbare Abbildung ist.
- Ein zufälliges Zählmaß $N : \Omega \to \mathbb{N}$ ist eine Zufallsvariable über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in dem messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$.

Definition von Punktprozessen

- Sei $S_1, S_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ eine beliebige Folge von Zufallsvektoren über $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass f.s.

$$\#\{n : S_n \in B\} < \infty \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d).$$

  Dann heißt $\{S_n\}$ ein zufälliger Punktprozess.

- Falls zusätzlich

$$S_i \neq S_j \qquad \forall\, i, j \geq 1 \text{ mit } i \neq j \text{ und } S_i \neq \infty,$$

  dann heißt $\{S_n\}$ ein einfacher Punktprozess.

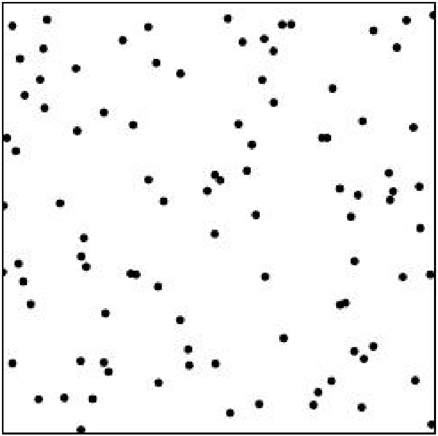
Definition von Punktprozessen

- Durch den Ansatz

$$N_B := \#\{n : S_n \in B\} \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

ist ein lokal endliches zufälliges Zählmaß $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ gegeben.

Realisierung eines Poisson-Prozesses



Inhaltsverzeichnis

Das Intensitätsmaß

Sei $\{S_n\}$ ein beliebiger Punktprozess und $\{N_B\}$ das zugehörige Zählmaß. Dann heißt das Maß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ mit

$$\mu(B) = \mathbb{E}\, N_B \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

das Intensitätsmaß von $\{S_n\}$.

Intensität und Intensitätsfunktion

- Ist μ proportional zum d-dimensionalen Lebesgue-Maß mit

$$\mu(B) = \lambda \nu_d(B) \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

so heißt λ die Intensität von $\{S_n\}$.

- Ist μ absolutstetig bzgl. des d-dimensionalen Lebesgue-Maßes mit

$$\mu(B) = \int_B \lambda(x)dx \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

so heißt die Borel-messbare Funktion $\lambda : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ die Intensitätsfunktion von $\{S_n\}$.

Inhaltsverzeichnis

Stationarität, Isotropie und Bewegungsinvarianz

Ein Punktprozess $\{S_n\}$ bzw. das zugehörige Zählmaß $\{N_B\}$ heißt

- stationär, falls

$$(N_{B_1}, \dots, N_{B_n}) \stackrel{\mathrm{D}}{=} (N_{B_1+x}, \dots, N_{B_n+x})$$

für beliebige $n \geq 1$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

- isotrop, falls

$$(N_{B_1}, \dots, N_{B_n}) \stackrel{\mathrm{D}}{=} (N_{\delta(B_1)}, \dots, N_{\delta(B_n)})$$

für beliebige $n \geq 1$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und jede Drehung $\delta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ um den Ursprung.

- bewegungsinvariant, falls er bzw. es stationär und isotrop ist.

Verschiebung und Drehung von homogenen Poisson-Prozessen

- Sei $\{S_n\}$ ein homogener Poisson-Prozess.
- Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Verknüpfung aus einer Verschiebung und einer Drehung um den Ursprung.
- Dann ist $\{f(S_n)\}$ ist ein homogener Poisson-Prozess

Eigenschaften stationärer Punktprozesse

Sei $\{N_B\}$ ein stationäres zufälliges Zählmaß mit dem lokal endlichen Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$.

i. Dann gibt es eine Konstante $\lambda < \infty$, so dass

$$\mu(B) = \lambda \nu_d(B) \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

ii. Dann gilt

$$P(\{N_{\mathbb{R}^d} = \infty\} \cup \{N_{\mathbb{R}^d} = 0\}) = 1.$$

Inhaltsverzeichnis

Das Campbellsche Theorem

Sei $\{S_n\}$ ein Punktprozess mit dem Intensitätsmaß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$, und sei $f : \mathbb{R}^d \cup \{\infty\} \to [0, \infty)$ eine Borel-messbare Funktion mit $f(\infty) = 0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(S_n)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu(dx).$$

Inhaltsverzeichnis

Definition eines Cox-Prozesses

Sei $\{\Lambda_B\}$ ein beliebiges zufälliges Maß, das f.s. lokal endlich ist. Das zufällige Zählmaß $\{N_B\}$ wird Cox-Prozess mit dem zufälligen Intensitätsmaß Λ genannt, falls

$$P(\cap_{i=1}^{n}\{N_{B_i} = k_i\}) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\Lambda_{B_i}^{k_i}}{k_i!} \exp(-\Lambda_{B_i})\right)$$

für beliebige $n \geq 1$, $k_1, ..., k_n \geq 0$ und paarweise disjunkte $B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Das Intensitätsmaß eines Cox-Prozesses

- Das Intensitätsmaß eines Cox-Prozesses $\{N_B\}$ ist gegeben durch

$$\mu(B) = \mathbb{E}\,\Lambda_B \qquad \forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

- $\{N_B\}$ ist genau dann stationär, wenn $\{\Lambda_B\}$ stationär ist, und dann ist die Intensität λ gegeben durch

$$\lambda = \mathbb{E}\,\Lambda_{[0,1]^d}.$$

Inhaltsverzeichnis

Definition eines Cluster-Prozesses

- Sei $\{S_n\}$ ein Punktprozess mit dem lokal endlichen und diffusen Intensitätsmaß $\{\mu^{(0)}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$.
- Sei $Z = \{n : S_n \in \mathbb{R}^d\}$.
- Sei $\{N_B^{(1)}\}, \{N_B^{(2)}\}, \ldots$ eine Folge von iid Punktprozessen, die von $\{S_n\}$ unabhängig sind und deren Intensitätsmaß $\{\mu^{(1)}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ endlich ist.

Definition eines Cluster-Prozesses

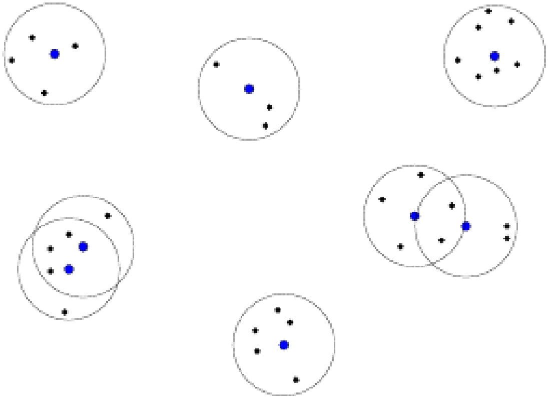
- $\{N_B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$, gegeben durch

$$N_B = \sum_{n \in Z} N^{(n)}_{B-S_n} \qquad \forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

ist f.s. lokal endlich und heißt Cluster-Prozess, falls

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B-x)\mu^{(0)}(dx) < \infty \qquad \forall\ B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d).$$

Realisierung eines Matern-Cluster-Prozesses



Das Intensitätsmaß eines Cluster-Prozesses

- Das Intensitätsmaß $\{\mu(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ eines Cluster-Prozesses ist gegeben durch

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu^{(1)}(B - x)\mu^{(0)}(dx) \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

- Falls $\{S_n\}$ stationär mit der Intensität λ_0 ist, dann ist $\{N_B\}$ stationär, und die Intensität λ ist gegeben durch

$$\lambda = \lambda_0 \mu^{(1)}(\mathbb{R}^d).$$

Literatur

- V. Schmidt, Räumliche Statistik. Vorlesungsskript(2008).
- J.F.C. Kingman, Poisson Processes. Oxford Science Publications(1993).

Bilder

- V. Schmidt, Räumliche Statistik. Vorlesungsskript(2008). Seiten 8 und 43

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!