Schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Patrick Dress

6. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Motivation (Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen)

Sind $P_n, n \in \mathbb{N}$ und P Wahrscheinlichkeitsmaße über $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}^k)$, so wäre es naheliegend, eine Verteilungskonvergenz $P_n \to P$ durch die Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} P_n(B) = P(B) \qquad \forall B \in \mathbb{B}^k.$$

zu definieren.

Einleitung

Beispiel (Dirac-Verteilung)

Gelte für $n \in \mathbb{N}$ $P_n(B) = \mathbb{1}_B(1/n)$, $B \in \mathbb{B}^1$.

1. Dann gilt $P_n \to \delta_0$ auf dem Punkt 0.
2. Es gilt aber NICHT

$$P_n(B) \to \delta_0(B) \quad \forall B \in \mathbb{B}^1$$

Einleitung

Beispiel (Dirac-Verteilung)

Gelte für $n \in \mathbb{N}$ $P_n(B) = \mathbb{1}_B(1/n)$, $B \in \mathbb{B}^1$.

1. Dann gilt $P_n \to \delta_0$ auf dem Punkt 0.
2. Es gilt aber NICHT

$$P_n(B) \to \delta_0(B) \quad \forall B \in \mathbb{B}^1$$

3. beispielsweise erhält man für $B = (-\infty; 0]$:

$$P_n((-\infty; 0]) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ aber } \delta_0((-\infty; 0]) = 1$$

Einleitung

Beispiel (Dirac-Verteilung)

Gelte für $n \in \mathbb{N}$ $P_n(B) = \mathbb{1}_B(1/n)$, $B \in \mathbb{B}^1$.

1. Dann gilt $P_n \to \delta_0$ auf dem Punkt 0.
2. Es gilt aber NICHT
$$P_n(B) \to \delta_0(B) \quad \forall B \in \mathbb{B}^1$$
3. beispielsweise erhält man für $B = (-\infty; 0]$:
$$P_n((-\infty; 0]) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ aber } \delta_0((-\infty; 0]) = 1$$

Definition der schwachen Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Definition (Schwache Konvergenz (2.Definition))

Es seien P, P_n, n$\in \mathbb{N}$, Wahrscheinlichkeitsmaße über $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}^k)$ mit Verteilungsfunktionen F, F_n, $n \in \mathbb{N}$. F heißt Limesverteilung der Folge $F_n, n \in \mathbb{N}$, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \qquad \forall x \in C(F).$$

Definition der schwachen Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Definition (Schwache Konvergenz (1.Definition))

Eine Folge P_n, $n \in \mathbb{N}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}^k)$ konvergiert schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}^k)$, kurz $P_n \xrightarrow{w} P$, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \int f \, dP_n = \int f \, dP \qquad \forall f \in C(\mathbb{R}^k).$$

Definition

Definition (Verteilungskonvergenz)

Es seien X, X_n, $n \in \mathbb{N}$, k-dimensionale Zufallsvektoren mit den Verteilungsfunktionen F^X, F^{X_n}. Die X_n heißen verteilungskonvergent gegen X(kurz: $X_n \xrightarrow{d} X$), wenn gilt

$$P^{X_n} \to P^X.$$

Beispiel

Beispiel (Poissonscher Grenzwertsatz)

Es gelte $X_n \sim Bin(n, p_n)$ mit $p_n = a/n + o(1/n)$, $a > 0$, d.h.,

$$\lim_{n\to\infty} np_n = a \text{ und}$$

$$X_0 \sim Poi(a).$$

Dann sind die X_n verteilungskonvergent gegen X_0, d.h.,

$$Bin(n, p_n) \to Poi(a)$$

.

Konvergenzarten

Es seien X, $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen. Dann gilt:

- $X_n \xrightarrow{fs} X \iff P(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$
- $X_n \xrightarrow{P} X \iff \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$

Konvergenzarten

Es seien X, $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen. Dann gilt:

- $X_n \xrightarrow{fs} X \iff P(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$
- $X_n \xrightarrow{P} X \iff \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$
- $X_n \xrightarrow{L^r} X \iff \lim_{n\to\infty} E\,|X_n - X|^r = 0 \qquad r \geq 1$

Konvergenzarten

Es seien X, $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen. Dann gilt:

- $X_n \xrightarrow{fs} X \iff P(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$
- $X_n \xrightarrow{P} X \iff \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$
- $X_n \xrightarrow{L^r} X \iff \lim_{n\to\infty} E\,|X_n - X|^r = 0 \qquad r \geq 1$
- $X_n \xrightarrow{d} X \iff \lim_{n\to\infty} F^{X_n}(x) = F^X(x) \qquad \forall x \in C(F^X)$

Konvergenzarten

Es seien X, $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen. Dann gilt:

- $X_n \xrightarrow{fs} X \iff P(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$
- $X_n \xrightarrow{P} X \iff \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$
- $X_n \xrightarrow{L^r} X \iff \lim_{n\to\infty} E\,|X_n - X|^r = 0 \qquad r \geq 1$
- $X_n \xrightarrow{d} X \iff \lim_{n\to\infty} F^{X_n}(x) = F^X(x) \qquad \forall x \in C(F^X)$

Zusammenhang der Konvergenzarten

$$\begin{tikzcd}
\xrightarrow{L^s} \arrow[r, phantom, "\underset{s>r\geq 1}{\Rightarrow}"] & \xrightarrow{L^r} \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \\
\xrightarrow{fs} \arrow[r, phantom, "\Rightarrow"] & \xrightarrow{P} \arrow[r, phantom, "\Rightarrow"] & \xrightarrow{d}
\end{tikzcd}$$

Wiederholung

Satz (Zusammenhang der Konvergenzarten)

Aus $X_n \xrightarrow{P} X$ folgt $X_n \xrightarrow{d} X$.
Ist $X \equiv const$ f.s., so gilt auch die Umkehrung.

Beispiel

Beispiel (Gegenbeispiel)

Es seien $(X_n)_{n\geqslant 1}$ iid Zufallsvariablen mit $X_n \sim Bin(1, 1/2), n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt $X_n \xrightarrow{d} X_1$, aber

$$\begin{aligned} P(|X_n - X_1| > \epsilon) &= P(X_n \neq X_1) \\ &= 1/2 \qquad \forall \epsilon \in (0, 1] \text{ und } \forall n \geqslant 2 \end{aligned}$$

nicht die stochastische Konvergenz.

Beweis der Hinrichtung

Beweis der Hinrichtung.

Aus $X_n \xrightarrow{P} X$ folgt $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X) \qquad \forall f \in C(\mathbb{R})$.
Dann gilt mit der $||.||$ Supremumsnorm auf $C(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} |E(f(X_n) - E(f(X))| &\leqslant E\,|f(X_n) - f(X)| \\ &\leqslant \epsilon + 2||f||P(|f(X_n) - f(X)| > \epsilon) \qquad \forall \epsilon > 0 \end{aligned}$$

$\square$

Definition der Straffheit von Maßen

Definition (Straffheit von Maßen)

Eine Familie $(P_i)_{i\in I}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}^k)$ heißt straff oder auch masseerhaltend, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^k$ existiert mit

$$\sup_{i\in I} P_i(K^c) < \epsilon$$

Definition der gleichgradigen Integrierbarkeit

Definition (Gleichgradige Integrierbarkeit)

Eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ ist genau dann gleichgradig integrierbar, wenn die durch

$$Q_i(B) = \int_B |x| \, P^{X_i}(dx), B \in \mathbb{B}$$

definierte Maßfamilie straff ist.

Satz von Slutsky

Satz (von Slutsky)

Aus $X_n \xrightarrow{d} X$ *und* $Y_n \xrightarrow{P} c$ *folgt*

$$f(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} f(X, c) \qquad \forall \text{ messbaren Funktionen } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R} \times (c - \eta, c + \eta) \subset C(f)$$

für ein $\eta > 0$.

Satz von Slutsky

Insbesondere gilt:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
- $X_n Y_n \xrightarrow{d} XY$
- $X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c : \quad c \neq 0, \quad Y_n \neq 0 \quad f.s. \qquad \forall n \geqslant 1$

Portemanteau Theorem

Theorem (Portemanteau Theorem)

Für Wahrscheinlichkeitsmaße $P, P_1, P_2, \ldots$ *auf* $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}^k)$ *gilt äquivalent:*

1. $P_n \xrightarrow{w} P$
2. $\lim_{n\to\infty} P_n(\mathbb{R}^k) = P(\mathbb{R}^k)$ *und* $\liminf_{n\to\infty} P_n(A) \leqslant P(A)$ $\forall A \subset \mathbb{R}^k$ *offen*

Portemanteau Theorem

Theorem (Portemanteau Theorem)

Für Wahrscheinlichkeitsmaße $P, P_1, P_2, \dots$ auf $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}^k)$ gilt äquivalent:

1. $P_n \xrightarrow{w} P$
2. $\lim_{n\to\infty} P_n(\mathbb{R}^k) = P(\mathbb{R}^k)$ *und* $\liminf_{n\to\infty} P_n(A) \leqslant P(A)$ $\forall A \subset \mathbb{R}^k$ *offen*
3. $\lim_{n\to\infty} P_n(\mathbb{R}^k) = P(\mathbb{R}^k)$ *und* $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \geqslant P(F)$ $\forall F \subset \mathbb{R}^k$ *geschlossen*

Portemanteau Theorem

Theorem (Portemanteau Theorem)

Für Wahrscheinlichkeitsmaße $P, P_1, P_2, \dots$ *auf* $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}^k)$ *gilt äquivalent:*

1. $P_n \xrightarrow{w} P$
2. $\lim_{n\to\infty} P_n(\mathbb{R}^k) = P(\mathbb{R}^k)$ *und* $\liminf_{n\to\infty} P_n(A) \leqslant P(A)$ $\forall A \subset \mathbb{R}^k$ *offen*
3. $\lim_{n\to\infty} P_n(\mathbb{R}^k) = P(\mathbb{R}^k)$ *und* $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \geqslant P(F)$ $\forall F \subset \mathbb{R}^k$ *geschlossen*
4. $\lim_{n\to\infty} P_n(C) = P(C)$ $\quad \forall$ *P-stetige Mengen* $C \in \mathbb{B}^k$

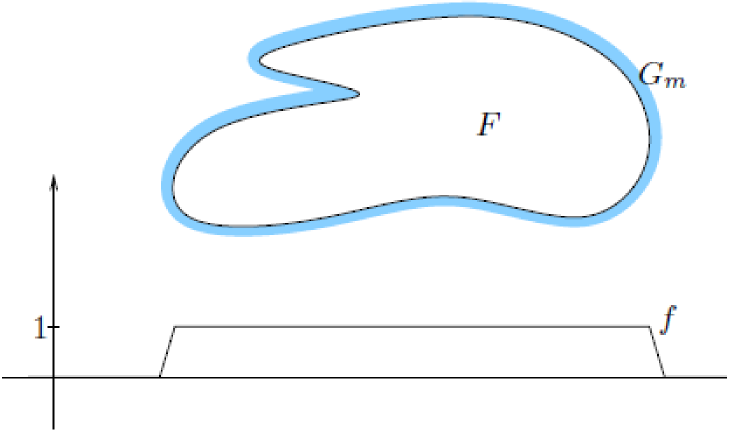
Portemanteau Theorem

Theorem (Portemanteau Theorem)

Für Wahrscheinlichkeitsmaße $P, P_1, P_2, \dots$ auf $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}^k)$ gilt äquivalent:

1. $P_n \xrightarrow{w} P$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(\mathbb{R}^k) = P(\mathbb{R}^k)$ *und* $\liminf\limits_{n\to\infty} P_n(A) \leqslant P(A)$ $\forall A \subset \mathbb{R}^k$ *offen*
3. $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(\mathbb{R}^k) = P(\mathbb{R}^k)$ *und* $\limsup\limits_{n\to\infty} P_n(F) \geqslant P(F)$ $\forall F \subset \mathbb{R}^k$ *geschlossen*
4. $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(C) = P(C) \qquad \forall$ *P-stetige Mengen* $C \in \mathbb{B}^k$

Beweisidee zum Portemanteau Theorem



Weitere Sätze zur Konvergenz in Verteilung

Satz

Es seien zwei Folgen $X_n, Y_n : \Omega \to \mathbb{R}^k$ und eine Metrik p gegeben. Dann gilt:

$X_n \xrightarrow{d} X$ *und* $p(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow Y_n \xrightarrow{d} X$.

Motivation

- Einer der fundamentalsten Aussagen der Wahrscheinlichkeitstheorie
- Kernaussage: Die Summe von iid verteilten Zufallsvariablen konvergiert mit wachsendem Umfang gegen die Standardnormalverteilung und ist unabhängig von der konkreten Verteilung der Zufallsvariablen.
- Frage: Lässt sich die Bedingung der identischen Verteilung der Zufallsvariablen auch abschwächen?

Definition

Definition (Lindeberg-Bedingung)

X_n, $n \in \mathbb{N}$, seien unabhängige Zufallsvariablen mit den induzierten Wahrscheinlichkeitsmaßen $P_n = P^{X_n}$. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Lindeberg-Bedingung, wenn für jedes $\delta > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|x-\mu_j|\geqslant\delta\tau_n} (x-\mu_j)^2 \, dP_j(x) = 0$$

Interpretation der Lindeberg-Bedingung I

Sei

$$A_i := \left\{ \frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma_n} > \epsilon \right\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \int\limits_{|X_i - \mu_i| > \sigma_n \epsilon} dF_{X_i}(x) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2 \sigma_n^2} \int\limits_{|X_i - \mu_i| > \sigma_n \epsilon} (x - \mu_i)^2 \, dF_{X_i}(x) \end{aligned}$$

Interpretation der Lindeberg-Bedingung II

$$P\left(\sup \frac{|X_i - \mu_i|}{\sigma_n} > \epsilon\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2 \sigma_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|X_i - \mu_i| > \sigma_n \epsilon} (x - \mu_i)^2 \, dF_{X_i}(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Zentraler Grenzwertsatz

Satz (Zentraler Grenzwertsatz)

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge unabhängiger Zufallsvarablen mit $\sigma_n^2 < \infty$, die der Lindeberg-Bedingung genügt. Dann konvergiert die Folge der Verteilungen der standardisierten Summen

$$S_n = \frac{1}{\tau_n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu_j)$$

in Verteilung gegen die N(0,1)-Verteilung: $P^{S_n} \xrightarrow{d} N(0,1)$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!