5. Juli 2010

Universität Ulm, Institut Stochastik

Seminar: Stochastische Geometrie und ihre Anwendungen
- Unbegrenzt teilbare und stabile Verteilungen.

Ausarbeitung: Stefan Funke
Betreuer: Jun.-Prof. Dr. Zakhar Kabluchko

Unbegrenzt teilbare und stabile Verteilungen

Ziel dieser Ausarbeitung (des Vortrages) ist es, die Aussagen des bekannten Zentralen Grenzwertsatzes zu verallgemeinern.

Zentraler Grenzwertsatz
Seien $X_1, X_2, ...$ iid Z.v. mit $E|X| =: \mu < \infty, EX^2 < \infty$ und damit $Var(X) =: \sigma^2 < \infty$,
$S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $ES_n = n\mu$, $Var(S_n) = n\sigma^2$
$\Rightarrow Z_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to Z \sim N(0,1)$ für $n \to \infty$

Wir betrachten nun Folgen von Zufallsvariablen, deren Varianz, bzw. deren Momente nicht existieren oder unbestimmt sein können.

Beispiel: Cauchy-Verteilung
Die Dichte der Cauchy-Verteilung ist gegeben durch:
$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$
Die charakteristische Funktion ist gegeben durch:
$\varphi(t) = exp(-|t|)$

Berechne ersten und zweiten Moment einer Z.v. X $\sim$ Cauchy
$EX = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = lim_{R\to\infty}\frac{ln(1+x^2)}{2\pi}|_{-R}^{R} = \infty - \infty$
$EX^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}(\int_{-\infty}^{\infty} dx - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx) = \frac{1}{\pi}(\int_{-\infty}^{\infty} dx - \pi) = \infty$
$\Big[$Bem: $\frac{d}{dx}arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}\Big]$

Daraus folgt, dass wir auf eine Folge von Cauchy verteilten Z.v. den Zentralen Grenzwertsatz nicht anwenden können.

Seien $X_1, X_2, ...$ iid mit $X_1 \sim Cauchy$
$S_n := \sum_{k=0}^{n} X_k$
$\varphi_{S_n}(t) = exp(-n\,|t|) \rightarrow^{(n\rightarrow\infty)} \begin{cases} 1, & t=0 \\ 0, & sonst \end{cases}$
Die Grenzfunktion ist keine charakteristische Funktion (da unstetig).
Normiert man die Summe jedoch entsprechend, so erhält man im Grenzfall wieder eine Cauchy verteilte Z.V.
$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = exp(-\frac{n}{n}\,|t|) = exp(-\,|t|)$

Stabile Verteilungen

Definition: Stabile Verteilungen
Eine Zufallsvariable T mit charakteristischer Funktion $\varphi_T(t)$ heißt stabil, falls $\forall$ n ≥ 1 Konstanten $a_n > 0$, b_n s.d. gilt: $a_nT + b_n \overset{\text{d}}{=} X_1 + ... + X_n$, wobei $X_1, ..., X_n$ unabhängige Z.v. verteilt wie T. Für die charakteristische Funktion gilt: $(\varphi_T(t))^n = \varphi_T(a_nt)e^{ib_nt}$.

Beispiel: Normalverteilung
Die char. Fkt. einer normalverteilten Z.v. X $\sim$ N(μ, σ^2) ist gegeben durch:
$\varphi_X(t) = exp(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2)$

nach Definition:
Gesucht sind Kontanten $a_n > 0$, b_n s.d.
$\varphi_X(a_nt) \cdot e^{ib_nt} = exp(ita_n\mu + ib_nt - \frac{1}{2}a_n^2t^2\sigma^2) = exp(it(\underbrace{a_n\mu + b_n}_{\overset{!}{=}n\mu}) - \frac{1}{2}t^2\sigma^2 \underbrace{a_n^2}_{\overset{!}{=}n}) \overset{!}{=}$
$exp(it\mu) - \frac{1}{2}t^2\sigma^2)^n$
$\Rightarrow a_n = \sqrt{n}$, $b_n = (n - \sqrt{n})\mu$
$\Rightarrow$ Normalverteilung ist stabil.

In oberem, ersten Beispiel haben wir bereits gesehen, dass auch die Cauchy-Verteilung stabil ist.

Satz: Betrachte Z.v. $X_1, X_2, ...$ iid mit $X_1 \sim F$, falls $\exists\ a_n > 0$, b_n s.d. $P(\frac{X_1+...+X_n-b_n}{a_n} \leq x) \Rightarrow F(x)$ wobei F nicht entartet ist, so folgt: F ist stabil.

Definition: Z.v. X besitzt eine entartete Verteilung im Punkt a, falls ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion gegeben ist durch $P(X = a) = 1$.

Beweis: $X_1, X_2, ...$ iid. mit $X_1 \sim F$. $T \overset{\text{d}}{=} lim_{n\rightarrow\infty} \frac{X_1+...+X_n-b_n}{a_n}$ mit $T \sim F$
$G_1 := \frac{X_1+...+X_n-b_n}{a_n} \rightarrow T^{(1)} \sim F$

$G_2 := \frac{X_{n+1}+...+X_{2n}-b_n}{a_n} \to T^{(2)} \sim F$

$\Rightarrow \frac{X_1+...+X_{2n}-2b_n}{a_n} = G_1 + G_2 \to^d_{n\to\infty} T^{(1)} + T^{(2)}$
Außerdem gilt: $\frac{X_1+...+X_{2n}-2b_n}{a_n} = \frac{X_1+...+X_{2n}-b_{2n}+(b_{2n}-2b_n)}{a_{2n}} \frac{a_{2n}}{a_n}$
$= \underbrace{\alpha_n^{(2)}}_{\frac{a_{2n}}{a_n}} V_{2n} + \underbrace{\beta_n^{(2)}}_{\frac{b_{2n}-2b_n}{a_n}}$ mit $V_{2n} = \frac{X_1+...+X_{2n}-b_{2n}}{a_{2n}}$

$\Rightarrow V_{2n} = \frac{\left[\frac{X_1+...+X_{2n}-2b_n}{a_n}\right]-\beta_n^{(2)}}{\alpha_n^{(2)}} \to^d \frac{T^{(1)}+T^{(2)}-\beta^{(2)}}{\alpha^{(2)}}$
Und $V_{2n} \to^d T$
Man kann zeigen, dass $\alpha^{(2)}, \beta^{(2)}$ existieren, s.d. $lim_{n\to\infty}\alpha_n^{(2)} = \alpha^{(2)}$ und $lim_{n\to\infty}\beta_n^{(2)} = \beta^{(2)}$
$\Rightarrow T \stackrel{\text{d}}{=} \frac{T^{(1)}+T^{(2)}-\beta^{(2)}}{\alpha^{(2)}}$
Dies lässt sich verallgemeinern auf:
$T \stackrel{\text{d}}{=} \frac{T^{(1)}+...+T^{(k)}-\beta^{(k)}}{\alpha^{(k)}}$
$\Rightarrow$ T ist stabil.

Definition: Attraktor und Anziehungsbereiche
Eine stabile Verteilung F heißt Attraktor (einer Summe von iid und entsprechend normierten Z.v. $X_1, X_2, ...$), falls sie die Aussagen obigen Satzes erfüllt. Bzw.: Die Verteilung der X_i gehört zum Anziehungsbereich der stabilen Verteilung F.

Beispiel: Jede Z.v. X mit endlicher Varianz liegt im Anziehungsbereich der Normalverteilung. Mit $a_n = nEX$ und $b_n = \sqrt{n}\sqrt{Var(X)}$. (Zentraler Grenzwertsatz)

Holtzmark Beispiel

1920 stellte und löste Holtzmark folgendes Problem: man betrachte zufällig im Raum verteilte, elektrisch geladene Teilchen. Wie ist die Verteilung des resultierenden elektrischen Felds in einem bestimmten Punkt?
1940 betrachtete Chandrasekhar ein analoges Problem: Wie sieht das Gravitationsfeld von zufällig im Raum verteilten Körpern (Massen) aus?

Wir betrachten ein sehr vereinfachtes 1-dimensionales Modell.
Seien n Körper im Intervall $[-n, n]$ gleichverteilt und unabh. mit Masse $m > 0$.
(Gravitationskonstante als Einheit)

„Modelliere" die Kraft auf eine Einheitsmasse im Ursprung als
$F_n := \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{m \cdot sign(X_i)}{X_i^2}}_{=:X}$

mit X_i Koordinate des i-ten Körpers.

Wir zeigen nun: $\exists\ F \overset{\mathrm{d}}{=} lim_{n\to\infty} F_n$
Berechne zunächst char. Funktion $\varphi_{F_n}(t)$

$E(exp(itX)) = \int_{-n}^{n} exp(it\frac{m\cdot sign(x)}{x^2})\cdot\frac{1}{2n}dx$

$= \frac{1}{n}\int_0^n cos(\frac{tm}{x^2})dx$

$\Rightarrow \varphi_{F_n}(t) = (\frac{1}{n}\int_0^n cos(\frac{tm}{x^2})dx)^n$

$= (1-\frac{1}{n}\int_0^n(1-cos(\frac{tm}{x^2}))dx)^n$

$\to exp(-\int_0^\infty(1-cos(\frac{tm}{x^2}))dx)$ für $n\to\infty$ (gilt, da das Integral existiert.)

$= exp(-c\,|t|^{1/2})$, mit $c>0$. (nach Substitution, wobei c alle Konstanten Faktoren zusammenfasst.)

Diese Grenzfunktion ist stetig in 0 und damit wieder eine charakteristische Funktion.
Damit ist $\varphi(t) = exp(-c\,|t|^{1/2})$ die charakteristische Funktion einer Verteilung, zu welcher F_n schwach konvergiert.

Außerdem lässt sich zeigen, dass alle symmetrischen, stabilen Verteilungen eine charakteristische Funktion der Form:
$\varphi(t) = e^{-c|t|^\alpha}$ mit $0<\alpha\le 2$ und $c>0$ besitzen.
Obiges Beispiel ist ein Spezialfall für $\alpha = 1/2$
Für $\alpha=1$ erhält man die Cauchy-Verteilung.
Für $\alpha=2$ erhält man die Normalverteilung.
Beispiel für $\alpha=2$: $\varphi_X(t) = e^{-c|t|^2} = exp(-\frac{1}{2}t^2\underbrace{2c}_{=:\sigma^2})$

$\Rightarrow X\sim N(0,2c)$

Bemerkung: zeige: $\varphi(t) = e^{-c|t|^\alpha}$ mit $0<\alpha\le 2$ und $c>0$ ist eine char. Fkt. einer stabil verteilten Z.v. X.
Beweis: Suche Konstanten $a_n > 0$, $\mathrm{b}_n, s.d:$
$[\varphi(t)]^n = \varphi(a_n t)e^{ib_n t}$
$\Leftrightarrow exp(-nc|t|^\alpha) = exp(-c|a_n t|^\alpha + ib_n t) = exp(-ca_n^\alpha|t|^\alpha + ib_n t)$
$\Rightarrow b_n = 0$, $n = a_n^\alpha$
$\Leftrightarrow a_n = n^{1/\alpha}$

Unbegrenzt teilbare Verteilungen

Definition: Unbegrenzt teilbare Verteilungen
Eine Zufallsvariable T und ihre charakteristische Funktion φ_T heißen unbegrenzt teilbar, falls $\forall n \geq 1 \; \exists$ iid Zufallsvariablen $\eta_1, ..., \eta_n$ s.d. $T \overset{\mathrm{d}}{=} \eta_1 + ... + \eta_n$ bzw. $\varphi_T = (\varphi_{\eta_1})^n$

Beispiele :
Poisson-Verteilung:$T \sim Poi(\lambda)$ mit $P(T = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$\varphi_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = exp(\lambda(e^{it} - 1))$

Setze: $\varphi_n(t) = exp(\frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1))$, wobei $\varphi_n(t)$ char. Fkt. einer Poisson verteilten Z.v. ist, mit Parameter λ/n.
$\Rightarrow \varphi_T(t) = (\varphi_n(t))^n$ und damit unbegrenzt teilbar.
(oder: Setze: $\eta_i \sim Poi(\lambda/n)$ für $i = 1, ..., n$
$\Rightarrow \eta_1 + ... + \eta_n \sim Poi(\lambda)$)

Normalverteilung:
$\varphi(t) = exp(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2)$
Setze $\varphi_n(t) = exp(it\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}t^2\frac{\sigma^2}{n})$
$\Rightarrow \varphi(t) = (\varphi_n(t))^n$ und damit unbegrenzt teilbar.

Gamma-Verteilung:
$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ mit Dichte $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
und char. Fkt. $\varphi(t) = \frac{1}{(1-i\beta t)^\alpha}$
Setze $\varphi_n(t) = \frac{1}{(1-i\beta t)^{\alpha/n}}$, char. Fkt. einer Z.v. $Y \sim \Gamma(\alpha/n, \beta)$
$\Rightarrow \varphi(t) = (\varphi_n(t))^n$ und damit unbegrenzt teilbar.
Die Exponentialverteilung mit Parameter λ ist als Spezialfall der Gammaverteilung ebenfalls unbegrenzt teilbar. ($\alpha = 1$, $\beta = 1/\lambda$)

Zusammenhang: Sei F stabile Z.v. $\Rightarrow$ F unbegrenzt teilbar.
Beweis: F stabil. $\Rightarrow^{Def.} \forall\; n \geq 1 \; \exists \; X_1, ..., X_n$ iid mit $X_1 \overset{\mathrm{d}}{=} T$ und $\exists \; a_n > 0$, b_n sodass $a_nT + b_n \overset{\mathrm{d}}{=} X_1 + ... + X_n$

$$\Rightarrow T \overset{\mathrm{d}}{=} \underbrace{\frac{X_1 - \frac{b_n}{n}}{a_n}}_{=:\eta_1} + ... + \underbrace{\frac{X_n - \frac{b_n}{n}}{a_n}}_{=:\eta_n} = \eta_1 + ... + \eta_n$$

mit η_i iid für $i = 1, ..., n$
$\Rightarrow$ F unbegrenzt teilbar.

Die Rückrichtung gilt nicht.
Gegenbeispiel: Sei F$\sim Poi(\lambda)$

$\varphi_F(t) = exp(\lambda(e^{it} - 1))$

$\varphi_F(a_n t) \cdot e^{ib_n t} = exp(\lambda(\underbrace{e^{ia_n t} - 1}_{\overset{!}{=} n(e^{it}-1)}) + \underbrace{ib_n t}_{\overset{!}{=} 0}) \overset{!}{=} (\varphi_F(t))^n \ \forall$ t$\in \mathbb{R}$

$\Rightarrow b_n = 0$ (wegen Beschränktheit)

$\Rightarrow e^{ia_n t} = ne^{it} - n + 1|_{t=2\pi}$

$\Leftrightarrow e^{ia_n 2\pi} = ne^{2i\pi} - n + 1 = 1$

$\Leftrightarrow 2ia_n\pi = ln(1) = 0$

$\Leftrightarrow a_n = 0$ Widerspruch zu $a_n > 0$.

$\Rightarrow$ Poisson-Verteilung nicht stabil.

Definition: Dreiecksschema

Betrachte Z.v. $X_i^{(n)}$ mit $n = 1, 2, ...$ und $i = 1, ..., n$

Sowie $X_i^{(n)}$ zeilenweise unabhängig, d.h. $X_i^{(n)}$ unabh. für $i = 1, ..., n$

Beispiel:

$X_1^{(1)}$

$X_1^{(2)}$ $X_2^{(2)}$

$X_1^{(3)}$ $X_2^{(3)}$ $X_3^{(3)}$

...

Die Z.v. in einem Dreiecksschema erfüllen eine u.a.n. (uniformly, asymptotically negligible) Bedingung, falls

$lim_{n\to\infty} max_k P(\left|X_k^{(n)}\right| > \epsilon) = 0 \ \forall \epsilon > 0$

Es folgen zwei Grenzwertsätze.

Satz: Man kann zeigen: Falls $X_i^{(n)}$ Z.v. eines Dreiecksschemas sind, welche beliebig verteilt sind und eine u.a.n. Bedingung erfüllen und es gilt:

$P(X_1^{(n)} + ... + X_n^{(n)} \leq x) \Rightarrow F(x)$

Dann folgt, dass F unbegrenzt teilbar ist.

Es folgt ein ähnlicher Satz, mit vereinfachten Voraussetzungen.

Satz: Falls $X_i^{(n)}$ Z.v. eines Dreiecksschemas zeilenweise iid sind und es gilt:

$P(X_1^{(n)} + ... + X_n^{(n)} \leq x) \Rightarrow F(x)$

Dann folgt, dass F unbegrenzt teilbar ist.

Bemerkung: Man sieht, dass der Spezialfall „F stabil“ hier enthalten ist.

Setze dafür $X_i^{(n)} := \frac{X_i - \frac{b_n}{n}}{a_n}$

Wir betrachten ein weiteres Beispiel einer unbegrenzt teilbaren Verteilung.

Zusammengesetzte Poisson-Verteilung

Definition: $N, X_1, X_2, ...$ unabh. Z.v. $Sei N\sim$ Poi(μ) und $X_1, X_2, ...$ iid mit char. Funktion $\phi(t)$.
Dann heißt $X := X_1 + ... + X_N$ zusammengesetzt Poisson verteilt (compound Poisson).

Beispiel: Wir berechnen die char. Funktion von X.

$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{l=0}^{\infty} E(e^{itX}|N = l) \cdot P(N = l)$

$= \sum_{l=0}^{\infty} E(e^{it(X_1+...+X_l)}) \cdot P(N = l)$

$= \sum_{l=0}^{\infty} \phi(t)^l \cdot \frac{e^{-\mu}\mu^l}{l!}$

$= exp(\mu\phi(t) - \mu) = exp(\mu(\phi(t) - 1))$

$$\Rightarrow \varphi_X(t) = \left[\underbrace{exp(\frac{\mu}{k}(\phi(t) - 1))}_{\varphi_Y(t)}\right]^k$$
mit Y $\sim$ comp Poi
$\Rightarrow$ zusammengesetzte Poisson-Verteilungen sind unbegrenzt teilbar.

Satz: Eine Verteilung F ist unbegrenzt teilbar $\Leftrightarrow F \overset{\mathrm{d}}{=} lim_{n\to\infty}F_n$, mit F_n zusammengesetzt Poisson.

Literatur:
Lampwerti, Probability
W. Feller, An Introduction to Probability Theory ans Its Applications. Wiley(1971)
B. Fristedt and L. Gray, A Modern Approach to Probability Theory. Birkhäuser(1997)