Übungen zu Ökonometrie - Blatt 2

(Abgabe: Mittwoch, 4.5.2011, vor den Übungen)

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Bezeichne M_i den Geldumlauf in Deutschland in Mrd. DM zum Zeitpunkt i (z.B.) im Jahr 1985), BSP_i das Bruttosozialprodukt (in Mrd. DM) und r_i einen repräsentativen Zinssatz (in %). Man nimmt an, dass der folgende funktionale Zusammenhang besteht:

$$M_i = c \cdot BSP_i^{\eta} \cdot r_i^{\rho} \cdot e^{\varepsilon_i}, \quad i = 1, ..., n.$$

Bestimme durch eine geeignete Transformation der Daten von 1970 bis 1985 MKQ-Schätzwerte der Modellparameter c, η, ρ.

Jahr	i	M_i	BSP_i	r_i
1970	1	211.78	1322.8	9.41
1971	2	220.54	1363.1	7.15
1972	3	250.17	1422.3	5.61
1973	4	231.92	1491.1	12.41
1974	5	240.42	1492.0	9.90
1975	6	257.74	1473.0	4.96
1976	7	258.55	1554.7	4.25
1977	8	277.44	1594.4	4.37
1978	9	304.23	1649.4	3.70
1979	10	303.26	1715.9	6.69
1980	11	302.04	1733.8	9.54
1981	12	287.80	1735.7	12.11
1982	13	294.87	1716.5	8.88
1983	14	308.77	1748.4	5.78
1984	15	320.98	1802.0	5.99
1985	16	329.74	1833.5	5.44

(a) Führe den funtktionalen Zusammenhang $M_i = c \cdot BSP_i^{\eta} \cdot r_i^{\rho} \cdot e^{\varepsilon_i}$ durch geeignete Transformation in ein multivariates lineares Regressionsmodell $Y = X\beta + \varepsilon$ über. (2)

(b) Bestimme die Designmatrix X und den Vektor y des transformierten multivariaten lineares Regressionsmodells. (4)

(c) Es sei nun bekannt, dass (4)

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 355.9566 & -47.6741 & -2.2502 \\ -47.6741 & 6.4174 & 0.1813 \\ -2.2502 & 0.1813 & 0.4769 \end{pmatrix}$$

und $X^T y = (89.7292, 661.9385, 171.5064)^T$. Bestimme einen Schätzer für den Parametervektor. Runde das Ergebnis auf 2 Dezimalen.

(d) Prognostiziere die Zielvariable M_t aufgrund der folgenden fiktiven "Planung" für die Ausgangsgrößen in den Jahren 1986 und 1987: (2)

Jahr	i	BSP_i	r_i
1986	17	1875.00	5.25
1987	18	1925.00	5.25

Aufgabe 2 (13 Punkte)

In neun verschiedenen amerikanischen Wintersportorten wurden während einer gewissen Beobachtungszeit die Anzahl der Besucher registriert. Es wird angenommen, dass diese linear von der Gesamtlänge der zur Verfügung stehenden Pisten sowie der Liftkapazität abhängen.

Skigebiet	Pistenlänge	Liftkapazität	Besucherzahl
1	10.5	2 200	19 929
2	2.5	1 000	5 839
3	13.1	3 250	23 696
4	4.0	1 475	9 881
5	14.7	3 800	30 011
6	3.6	1 200	7 241
7	7.1	1 900	11 634
8	17.0	4 200	36 476
9	6.4	1 850	12 068

(a) Erstelle ein geeignetes Regressionsmodell, wobei die üblichen Normalverteilungsannahmen gelten sollen. (3)

(b) Prüfe die Hypothese $H_0^{(1)}$: "Es besteht keine Abhängigkeit des Besucheraufkommens von der Pistenlänge" und $H_0^{(2)}$: "Es besteht keine Abhängigkeit des Besucheraufkommens von der Liftkapazität" für das Signifikanzniveau $\gamma = 0.05$, wobei $t_{6,0.975} = 2.54$. (vgl. Abschnitt 3.3.4, Skript "Wirtschaftsstatistik" von Prof. Schmidt, Link auf Vorlesungshomepage)

Hinweise: $(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.993083 & 0.234087 & -0.001265 \\ 0.234087 & 0.144294 & -0.000646 \\ -0.001265 & -0.000646 & 0.000003 \end{pmatrix}, \quad X^T y = \begin{pmatrix} 156775 \\ 1820952 \\ 461629875 \end{pmatrix}$

$$S^2 = 0.32 \cdot 10^7, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad F_{2,6,0.95} = 5.14$$

(c) In einem zehnten Skigebiet stehen insgesamt 15.0 km Piste zur Verfügung bei einer Liftkapazität von 3950. Wie viele Besucher können in diesem Gebiet erwartet werden? (1)

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Linearisiere das nicht-lineare Modell

$$y_i = \beta_1 + \sin(\beta_2 x_i) + \beta_3 x_i^2 + \varepsilon_i$$

mit Hilfe der Taylorreihen-Approximation und stelle das zugehörige linearisierte Regressionsmodell auf. (vgl. Skript, Abschnitt 2.2.2)