Einführung in die Verzweigungsprozesse – Galton-Watson Modell

Laura Beggel

13. Mai 2011

1 Definitionen

1.1 Allgemeine Definition

Das *Galton-Watson Modell* ist ein spezieller stochastischer Prozess, der dazu dient, die *Wahrscheinlichkeit des Aussterbens* einer Population zu berechnen, welche sich selbstständig reproduziert. Bei der Entwicklung des Modelles durch H. Watson und F. Galton in den Jahren um 1874 stand dabei die Prognose des Überlebens der Adelshäuser im Vordergrund.
Heutzutage liefert dieses Modell in vielen unterschiedlichen Bereichen der Wissenschaft, wie zum Beispiel der Biologie aber auch in der Sicherheitsbranche, zuverlässige Ergebnisse.

1.2 Mathematische Definition

Damit ein stochastischer Prozess zu einem Galton-Watson Modell (GWM) wird, müssen bestimmte Voraussetzungen erfüllt sein, die im Folgenden erläutert werden:
Sei zunächst ξ eine *Zufallsvariable* mit Verteilung

$$p_k := P(\xi = k) \qquad \forall k \geq 0,$$

wobei $p_0, p_1 \notin \{0, 1\}$ und $\sum_{k\geq 0} p_k = 1$. Des Weiteren definiere $n \in \mathrm{N}_0$ den *Zeitpunkt*, zu dem der Prozess gemessen wird. Z_n gebe die *Populationsgröße* zum Zeitpunkt n an. Wichtig hierbei ist, dass für alle n jedes vorhandende Individuum der Population *zufällig* ein $i = 1, \ldots, Z_n$ zugeordnet bekommt.
Die Dynamiken des GWM werden durch drei grundlegende Eigenschaften definiert:

- Die Generation zum Zeitpunkt $n + 1$ wird durch alle Nachkommen der vorhandenen Individuen der Generation n gebildet.
- Für alle $1 \leq i \leq Z_n$ erzeugt das jeweilige Individuum i aus Generation n eine gewisse Anzahl an Nachkommen, welche mit ξ_i bezeichnet wird. Danach spielt das Individuum i im Modell keine Rolle mehr.
- Da ξ_i *iid* zu ξ, ist $p_k = P(\xi_i = k)$.

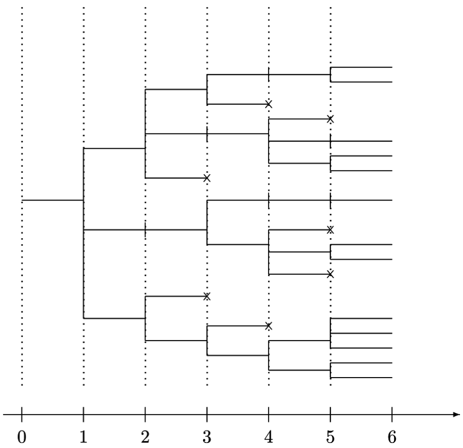
In der Grafik auf der folgenden Seite, die einen Galton-Watson Baum darstellt, lässt sich erkennen, wie sich eine Linie bzw. eine Population mit zunehmender Zeit entwickelt und in welcher Beziehung die einzelnen Individuen zueinander stehen. Diese Information geht im sogenannten *Galton-Watson Prozess* (GWP) verloren, der durch die homogene Markow-Kette $(Z_n; n \geq 0\ )$ gegeben wird. Dieser ist nach Definition der Parameter- und Zustandsräume der Kette diskret in Zeit und Raum. Homogene Kette bedeutet hierbei, dass die Wahrscheinlichkeiten, von einem Zustand in einen anderen überzugehen, unabhängig vom Zeitpunkt sind.
Damit man GWP leichter miteinander vergleichen kann, führt man eine spezielle Notation ein:
Wird ein Prozess mit $Z(x)$ bezeichnet, so bedeutet dies, dass zum Startzeitpunkt Z_0 x Individuen vorhanden waren. Ein GWP der Notation $Z(1)$ besteht somit zum Startzeitpunkt aus 1 Individuum, welches der Regelfall ist.

Ausgehend vom GWP lässt sich nun auch eine Definition der Verzweigungsprozesse geben:
Es sei $Z(x)$ gegeben. Bei der Betrachtung eines Galton-Watson Baumes lässt sich direkt erkennen, dass mit einer unabhängigen Kopie $\tilde{Z}$ von Z

$$Z(x+y) \stackrel{D}{=} Z(x) + \tilde{Z}(y)$$

gültig ist. Ein stochastischer Prozess, der diese Eigenschaft erfüllt, wird als *Verzweigungsprozess* bezeichnet.

Galton-Watson Baum:



2 Eigenschaften

2.1 Erzeugendenfunktion

Um die Auswertung eines GWM zu erleichtern, betrachtet man die sogenannte *Erzeugendenfunktion* einer Zufallsvariable. Zunächst soll diese für ξ vorgestellt werden, in Kapitel 2.3.1 dann bezüglich Z_n.
Die Erzeugendenfunktion f von ξ wird durch

$$f(s) := \mathrm{E}(s^{\xi}) = \sum_{k \geq 0} p_k s^k \quad s \in [0,1]$$

definiert und der Erwartungswert m durch

$$m := \mathrm{E}(\xi) = \lim_{s \to 1} f'(s) \in [0, +\infty]$$

gegeben. Dieser gibt im Populationsbezug die *durchschnittliche Nachkommenanzahl* wieder. Da $p_k \geq 0$ und dadurch f monoton wachsend ist, gilt

$$0 < f(0) = p_0 < f(1) = 1.$$

Somit ist 1 ein *Fixpunkt* von f.
Nach Definition der zweiten Ableitung

$$f''(s) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) p_k s^{k-2} \quad \geq 0$$

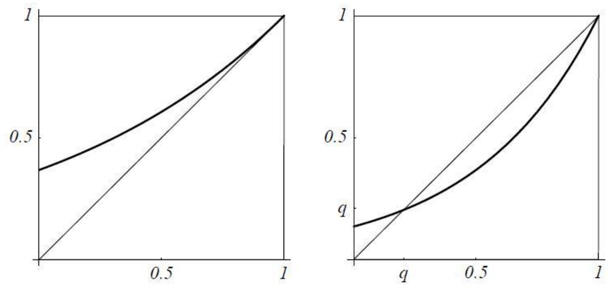


Abbildung 1: *Graph der Erzeugendenfunktion von f*
Links: subkritischer GWP, $m < 1$ *; Rechts: superkritischer GWP,* $m > 1$

ergibt sich, dass f auf [0,1] auch strikt konvex ist. Wie in der Abbildung 1 deutlich wird, hängt der Verlauf der Erzeugendenfunktion stark vom Erwartungswert m ab, worauf im nächsten Abschnitt gesondert eingegangen wird.

2.2 Kritische Modelle

Ein GWP wird als

- *subkritisch* bezeichnet, falls $m < 1$,
- *kritisch*, falls $m = 1$ und
- *superkritisch*, falls $m > 1$.

Anhand der Grafik 1 erkennt man, wie sich in den jeweiligen Fällen die Erzeugendenfunktion f verhält.
Ausgehend von dieser Einteilung des Erwartungswertes m kann man über f noch weitere Aussagen treffen:
Wie oben gezeigt, hat f in $s = 1$ einen Fixpunkt, unabhängig von m.
Da die Funktion monoton wachsend und strikt konvex ist, besteht die Möglichkeit, dass sie noch einen weiteren Fixpunkt $q \in (0, 1)$ besitzt. Bezogen auf die Grafik ist dies der Fall, wenn der Graph von f die Winkelhalbierende a schneidet. Hiefür gibt es 2, von m abhängige, Möglichkeiten:
Ist $m = f'(1) \leq 1$, so hat die Erzeugendenfunktion in 1 eine geringere Steigung als diese Gerade. Dadurch befindet sich f aufgrund der Konvexität und Monotonie immer überhalb der Verbindungsstrecke.
Genau gegenteilig verhält es sich im Fall $m = f'(1) > 1$. Im Punkt 1 ist f steiler als a und erreicht diesen somit von unten. Da die Erzeugendenfunktion, wie oben bewiesen, monoton wachsend und konvex ist, $f(0) > 0$ jedoch auch erfüllt, existiert ein weiterer Fixpunkt $q \in (0, 1)$, in dem der Graph von f die Winkelhalbierende schneidet.
Welche Bedeutung diese Fixpunkte für die Fragestellung der Aussterbewahrscheinlichkeit einer Population haben, wird im nächsten Abschnitt genauer erläutert.

2.3 Theoreme

2.3.1 Erzeugendenfunktion von Z_n

In Kapitel 2.1 wurde vorab die Erzeugendenfunktion einer Zufallsvariable ξ und ihre Eigenschaften vorgestellt. Aufbauend darauf lässt sich die Erzeugendenfunktion f_{Z_n} des Systemzustandes des GWM zum Zeitpunkt m wie folgt darstellen:

Die Erzeugendenfunktion von Z_n ist durch

$$f_{Z_n}(s) := \mathrm{E}_z(s^{Z_n}) = f_n(s)^z \quad s \in [0,1] \tag{1}$$

gegeben. Dabei sei $Z_n = z$ und f_n die n-te Iteration der Erzeugendenfunktion f mit sich selbst. Insbesondere ist $\mathrm{E}(Z_n|\ Z_0 = z) = m^n z$.

Bevor diese Darstellung bewiesen wird, muss ein kurzer Exkurs zu den Markow-Ketten unternommen werden:
Wie im vorigen Vortrag vorgestellt, wird eine Markow-Kette unter Anderem durch ihre Übergangswahrscheinlichkeit $P_1(i,j) = P\{Z_{n+1} = j|\ Z_n = i\}$ bestimmt. Dies gibt die Wahrscheinlichkeit wieder, in 1 Schritt von Zustand $Z_n = i$ nach Zustand $Z_{n+1} = j$ zu gelangen. Äquivalent dazu kann man die Wahrscheinlichkeit, in n Schritten von Zustand $Z_0 = i$ nach Zustand $Z_n = j$ als $P_n(i,j) = P\{Z_n = j|\ Z_0 = i\}$ darstellen.

Beweis: Seit zunächst die Iteration der Erzeugendenfunktion durch

$$f_0(s) = s, \quad f_1(s) = f(s), \quad f_2(s) = f(f(s)), \quad \dots \quad , \quad f_{n+1}(s) = f(f_n(s))$$

gegeben.
Es gilt:

$$\sum_{k\geq 0} \underbrace{P_1(1,k)}_{p_k} s^k = f(s)^1 = \mathrm{E}(s^\xi) \quad \text{und} \quad \sum_{k\geq 0} P_1(i,k) s^k = [f(s)]^i \ , \tag{2}$$

denn $P_1(i,k) = P\{Z_{n+1} = k \mid Z_n = i\} = P\{Z_1 = k \mid Z_0 = i\}$ aufgrund der Homogenität der Markow-Kette (siehe Kapitel 2.1) und
$\mathrm{E}(s^{Z_1} \mid Z_0 = i) = \mathrm{E}(s^{\sum_{a=1}^{i} \xi_a}) = \prod_{a=1}^{i} \mathrm{E}(s^{\xi_a}) = f(s)^i$ wegen ξ_i *iid* zu ξ.

Ein weiteres Hilfsmittel, das in diesem Beweis verwendet wird, ist die *Chapman-Kolmogorow Gleichung*

$$P_{n+1}(1,j) = \sum_{k\geq 0} P_n(1,k) P_1(k,j).$$

Diese sagt aus, dass man die Wahrscheinlichkeit, in $n+1$ Schritten von Zustand $Z_0 = 1$ nach Zustand $Z_{n+1} = j$ zu gelangen durch die Wahrscheinlichkeit, in n Schritten bis Zustand $Z_n = k$ sowie in 1 weiterem Schritt von Zustand $Z_n = k$ nach $Z_{n+1} = j$ zu gelangen, addiert über alle möglichen Zustände k, ausdrücken kann.
Dadurch ergibt sich

$$\sum_j P_{n+1}(1,j) s^j \overset{C.K}{=} \sum_j \sum_k P_n(1,k) P_1(k,j) s^j = \sum_k P_n(1,k) \sum_j P_1(k,j) s^j$$

und mit (2)

$$\sum_j P_{n+1}(1,j)s^j = \sum_k P_n(1,k)[\underbrace{f(s)}_{=:\,\tilde{s}}]^k.$$

Definiert man die Erzeugendenfunktion $f_{(n)}(s)$ für alle n von Z_n, wenn wir mit einem Individuum starten, durch

$$f_{(n)}(s) := \sum_j P_n(1,j)s^j,$$

so ergibt sich mit $\tilde{s} := f(s)$ aus den obigen drei Zeilen

$$f_{(n+1)}(s) := \sum_j P_{n+1}(1,j)s^j = \sum_k P_n(1,k)[\tilde{s}]^k = f_{(n)}(\tilde{s}) = f_{(n)}(f(s)) \ . \qquad (3)$$

Dies ist der Iteration der Erzeugendenfunktion schon recht ähnlich. Deswegen ist nun, am besten per Induktion, zu zeigen, dass $f_{(n)}(s) = f_n(s)$:
Für $n = 1$ ist dies sofort ersichtlich. Sei die Aussage für $n \in \mathrm{N}$ bewiesen. Dann ist $f_{n+1}(s) = f(f_n(s))$ nach Definition der Iteration. Für $f_{n+1}(s)$ gilt
$f_{(n+1)}(s) \overset{(3)}{=} f_{(n)}(f(s)) \overset{I.H.}{=} f_n(f(s)) = f_{n+1}(s)$.
Damit hat man gezeigt, dass die Erzeugendenfunktion f_{Z_n} iteriert aufgebaut ist.
Um die Darstellung auf einen variablen Startzustand $Z_0 = z$ anzupassen, bleibt noch zu zeigen, dass

$$\sum_{j\geq 0} P_n(i,j)s^j = [f_{(n)}(s)]^i$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq 0} P_n(i,j)s^j &\overset{C.K.}{=} \sum_j \sum_k P_{n-1}(i,k)P_1(k,j)s^j = \sum_k P_{n-1}(i,k)\sum_j P_1(k,j)s^j \\
&\overset{(2)}{=} \sum_k P_{n-1}(i,k)[f(s)]^k \\
&= \sum_j P_{n-2}(i,j)\sum_k P_1(j,k)[\underbrace{f(s)}_{=\tilde{s}}]^k \\
&= \sum_j P_{n-2}(i,j)f(f(s))^i \\
&= \underbrace{\cdots}_{n-3 \text{ mal}} \\
&= \sum_k P_1(i,k)f_{(n-1)}(s)^k = [f(f_{(n-1)}(s))]^i = [f_{(n)}(s)]^i
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\mathrm{E}_z(s^{Z_n}) = \sum_{j\geq 0} P_n(z,j)s^j = [f_n(s)]^z$$

und die Aussage (1) ist somit bewiesen.
Für den Beweis des Erwartungswertes benutzt man die Eigenschaften der Erzeugendenfunktion f, sodass

$$\mathrm{E}(Z_n \mid Z_0 = z) = [[f_n(s)]^z]' \quad \text{für} \quad s = 1.$$

Dadurch gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z_n \mid Z_0 = z) &= [[f_n(1)]^z]' = z\,\underbrace{[f_n(1)]^{z-1}}_{=1} f_n'(s) \\ &= z\,\underbrace{f'(f_{n-1}(1))\; f'(f_{n-2}(1)) \cdots f'(1)}_{n \text{ mal } m} = z\, m^n. \end{aligned}$$

q.e.d.

2.3.2 Aussterbewahrscheinlichkeit

In Kapitel 2.2 wurden schon erste Überlegungen zur Bedeutung der Fixpunkte q und 1 der Erzeugendenfunktion f von ξ aufgestellt, z.B. inwiefern deren Existenz von der mittleren Nachkommenanzahl abhängig ist. Die wichtigste Fragestellung eines GWP wurde noch in keiner Art und Weise angegangen: die *Aussterbewahrscheinlichkeit.*
Man sagt, dass ein *Aussterben* einer Population auftritt, falls ein n existiert, sodass $Z_n = 0$. Dieses Ereignis wird mit {Ext} bezeichnet. Im folgenden Theorem wird gezeigt, welcher Zusammenhang zwischen einem Fixpunkt und {Ext} besteht:

Wenn kein Aussterben auftritt, so ist $\lim_{n\to\infty} Z_n = +\infty$ *fast sicher.*
Außerdem gilt

$$\mathrm{P}_z(Ext) = q^z, \tag{4}$$

wobei $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}(\cdot \mid Z_0 = n)$

Beweis:
Nach Definition ist der GWP eine irreduzible Markow-Kette. Dies bedeutet, dass die Möglichkeit besteht, von jedem Zustand i in jeden Zustand j des Systems zu gelangen. Ausgeschlossen ist hiervon jedoch, vom Aussterben in einen anderen Zustand als 0 zurückzukehren. Diese lassen sich allgemein in 2 Klassen unterteilen: $\{0\}$ und $\{1, 2, \ldots\}$. Man erkennt, dass $\{0\}$ ein "Endzustand" ist, welcher absorbierend genannt wird. Einmal erreicht, sind auch die nachfolgenden Zustände immer 0. Anders verhält es sich ber der Klasse $\{1, 2, \ldots\}$. Jeder dieser Zustände kann nicht unendlich oft eintreten, denn die Wahrscheinlichkeit, in den Zustand 0 zu gelangen nimmt im Verlauf der Zeit an Masse zu und damit ist der erste Teil der Aussage bewiesen.
Für den Beweis von (2) betrachte man zunächst den Zustand $Z_n = 0$. Wie gerade erläutert, ist damit auch $Z_{n+1} = 0$ und damit die Folge $(\{Z_n = 0\})_{n\geq 0}$ monoton wachsend. Nach Definition von {Ext} ist selbiges das Ereignis, dass die Population jemals ausstirbt und deswegen gilt

$$\mathrm{P}(Ext) = \mathrm{P}(\bigcup_{n\geq 0} \{Z_n = 0\}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n = 0).$$

Für alle Erzeugendenfunktionen φ einer Zufallsvariable ist $\varphi(0) = p_0$, wobei $p_0 = \mathrm{P}(Z_1 = 0)$. Daraus ergibt sich mit (1), dass $\mathrm{P}_z(Ext) = \mathrm{P}_z(Z_n = 0) = f_n(0)^z$.
Zunächst betrachte man $\mathrm{P}(Ext) = b$ und eine Folge $(q_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} q_n = b$, die rekursiv definiert wird durch $q_0 = 0,\;\; q_1 = f(q_0) = f(0)$ und $q_{n+1} = f(q_n)$.

Diese ist durch die Eigenschaften von f monoton wachsend und stetig. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz ist b ein eindeutiger Fixpunkt von f, und somit nach Kapitel 2.2 $\in \{q, 1\}$. Weiter gilt, dass $0 = q_0 < b$ und

$$q_1 = f(0) \leq b \;\Rightarrow\; q_2 = f(q_1) \leq f(b) = b \;\Rightarrow \ldots \Rightarrow\; q_n \leq b$$

und dadurch $\lim_{n\to\infty} q_n \leq b = q \leq 1$. Damit ergibt sich durch einsetzen (2) und der Beweis ist beendet.

q.e.d.

3 Anwendung

3.1 Aufgabe

Sei $\mathrm{Var}(\xi) := \sigma^2$ endlich. Zu zeigen:

$$Var(Z_n \mid Z_0 = 1) = \begin{cases} \sigma^2 m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m-1}, & m \neq 1 \\ n\ \sigma^2, & m = 1 \end{cases}$$

Beweis:
Nach Definition ist $Var(Z_n) = \mathrm{E}(Z_n^2) - \underbrace{(\mathrm{E}Z_n)^2}_{m^{2n}}$.

Um den Erwartungswert von Z_n^2 zu berechnen, betrachtet man zuerst die Ableitungen der Erzeugendenfunktion von Z_n für $s = 1$:

$$\begin{aligned} f_n'(s) &= [\ f(f_{n-1}(s))\ ]' = f'(f_{n-1}(s))\ f_{n-1}'(s) \\ \Rightarrow f_n''(s) &= [\ f'(f_{n-1}(s))\ f_{n-1}'(s)\ ]' \\ &= f''(f_{n-1}(s))\ [\ f_{n-1}'(s)\ ]^2 + f'(f_{n-1}(s))\ f_{n-1}''(s) \\ &\overset{s=1}{=} f''(1)\ [\ f_{n-1}'(1)\ ]^2 + f'(1)\ f_{n-1}''(1) \end{aligned}$$

Durch Induktion erhält man, dass $f_{n-1}''(1) = f''(1)\ [\ f_{n-2}'(1)\ ]^2 + f'(1)\ f_{n-2}''(1)$ ist. Setzt man dies in die obige Gleichung ein, so ist

$$\begin{aligned} f_n''(1) &= f''(1)\ [\ f_{n-1}'(1)\ ]^2 + f'(1)\ f_{n-1}''(1) \\ &= f''(1)\ [\ f_{n-1}'(1)\ ]^2 + f'(1)\ [\ f''(1)\ [\ f_{n-2}'(1)\ ]^2 + f'(1)\ f_{n-2}''(1)\ ] \\ &= \underbrace{\ldots}_{n-2 \text{ mal}} \\ &= f''(1)\ \{\ [f_{n-1}(1)]^2 + f'(1)[\ f_{n-2}'(1)\ ]^2 + f'(1)^2[\ f_{n-3}'(1)\ ]^2 + \\ &\quad + \ldots + f'(1)^{n-2}[\ f_{n-(n-1)}'(1)\ ]^2 + f'(1)^{n-1}\} \\ &= f''(1)\ \{\ m^{2n-2} + m^{2n-3} + m^{2n-4} + \ldots + m^n + m^{n-1}\ \} \\ &= f''(1)\ m^{n-1}\ \{ \quad \underbrace{1 + m + m^2 + \ldots + m^{n-1}}_{=\sum_{k=0}^{n-1} m^k = \frac{m^n-1}{m-1},\ \text{für } m \neq 1\ ;\ \text{sonst } = nm} \quad \} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_n''(1) = f''(1)\ m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1}$$

Um einen Zusammenhang zwischen der zweiten Ableitung und der Varianz zu finden, betrachten wir im nächsten Schritt $f''_X(1)$ der Zufallsvariable X:

$$\begin{aligned}
f''_X(s) &= \sum_{k\geq 2} k(k-1)p_k s^{k-2} = \sum_{k\geq 2} k^2\ p_k s^{k-2} - \sum_{k\geq 2} k\ p_k s^{k-2} \\
&= \sum_{k\geq 0} k^2\ p_k s^{k-2} - p_0 - \sum_{k\geq 2} k\ p_k s^{k-2} + p_0 \\
&= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}X = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2 + (\mathrm{E}X)^2 - \mathrm{E}X \\
\Rightarrow Var(X) &= f''_X(1) - (\mathrm{E}X)^2 + \mathrm{E}X = f''_X(1) + \mathrm{E}X(1-\mathrm{E}X) \\
\Rightarrow f''_{Z_1}(1) &= Var(Z_1) + \mathrm{E}Z_1(1-\mathrm{E}Z_1) = \sigma^2 + m(m-1)
\end{aligned}$$

Im Allgemeinen folgt deshalb:

$$\begin{aligned}
Var(Z_n) &= f''_{Z_n}(1) + \mathrm{E}Z_n(1-\mathrm{E}Z_n) = f''_{Z_n}(1) + m^n(1-m^n) \\
&\overset{(1)}{=} f''_{Z_1}(1)\ m^{n-1}\frac{m^n-1}{m-1} + m^n(1-m^n) \\
&= (\sigma^2 + m(m-1))\ m^{n-1}\frac{m^n-1}{m-1} + m^n(1-m^n) \\
&= \sigma^2 m^{n-1}\frac{m^n-1}{m-1}\ +\ \underbrace{m(m-1)m^{n-1}\frac{m^n-1}{m-1}\ +\ m^n(1-m^n)}_{=0} \\
\Rightarrow Var(Z_n) &= \sigma^2 m^{n-1}\frac{m^n-1}{m-1}, \qquad \text{für } m \neq 1
\end{aligned}$$

Für $m = 1$ ergibt sich entsprechend, dass

$$Var(Z_n) = f''_{Z_1}(1)\ 1^{n-1}n + 1^n(1-1^n) = \sigma^2 n\ .$$

q.e.d.

3.2 Dualer Prozess

Es sei $m > 1$ gegeben. Unter einem *Dualen Prozess* versteht man einen, durch Bedingung auf $\{\text{Ext}\}$, aus Z generierten, subkritischen GWP Z^*, dessen Nachkommenverteilung durch $p_k^* = q^{k-1}p_k$ gegeben ist. Hierbei ist q der kleinste Fixpunkt von f_Z. Die Erzeugendenfunktion wird durch $f^*(s) = q^{-1}f_Z(qs)$ für $s \in [0,1]$ definiert.
Diese Aussagen lassen sich durch Nachrechnen überprüfen:

$$\begin{aligned}
f_Z(s) &= \sum_{k\geq 0} p_k s^k, \quad f_{Z^*}(s) = \sum_{k\geq 0} p_k^* s^k = \sum_{k\geq 0} q^{k-1}p_k s^k \\
\Rightarrow f(qs) &= \sum_{k\geq 0} p_k (qs)^k = \sum_{k\geq 0} p_k q^k s^k = q\ \sum_{k\geq 0} p_k q^{k-1} s^k = q\ f_{Z^*}(s)
\end{aligned}$$

Der Prozess ist subkritisch, da $f'_{Z^*}(1) < 1$, denn

$$f_{Z^*}(s) = [\ q^{-1}f(qs)\ ]' = q^{-1}f'_Z(qs)q \overset{s=1}{=} f'_Z(q) \overset{F.P.}{=} q\ <\ 1.$$

3.3 Geometrisches Modell

Ein Beispiel einer Nachkommenverteilung einer Generation ist das sogenannte *Geometrische Modell*.
Ist $p_k = (1-a)a^k$, so liegt dieses Modell vor und wird mit *Geometrisch(a)* in Abhängigkeit von Parameter $a \in (0,1)$ bezeichnet. Daher ergibt sich

$$f_Z(s) = \sum_{k\geq 0}(1-a)a^k s^k$$

für die Erzeugendenfunktion. Der Erwartungswert von Z berechnet sich aus

$$f'_Z(1) = (1-a)\sum_{k\geq 0} ka^k = (1-a)a\frac{1}{(a-1)^2} = \frac{a}{(1-a)} =: m$$

Das Modell ist superkritisch, falls $a \in (\frac{1}{2}, 1)$, denn $\frac{a}{1-a} > 1 \Leftrightarrow a > (1-a) \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$ und in diesem Fall ist die Aussterbewahrscheinlichkeit durch $q = \frac{1-a}{a}$ gegeben, denn

$$\begin{aligned} f_Z(\frac{1-a}{a}) &= (1-a)\sum_{k\geq 0} a^k(\frac{1-a}{a})^k = (1-a)\sum_{k\geq 0}(1-a)^k \overset{Geom.Reihe}{=} \\ &= (1-a)\frac{1}{1-(1-a)} = \frac{1-a}{a} \end{aligned}$$

Der dazugehörige Duale Prozess ist durch *Geometrisch(1-a)* gegeben, denn

$$p_k = (1-(1-a))(1-a)^k = a(1-a)^k$$

und

$$p_k^* = q^{k-1}p_{k_G} = (\frac{1-a}{a})^{k-1}\ (1-a)a^k = \frac{(1-a)^{k-1}}{a^{k-1}}\ (1-a)a^k = (1-a)^k a.$$

4 Ausblick

Wenn man nun abschließend das Galton-Watson Modell im Überblick betrachtet, liefert dies eine genaue Berechnung der Aussterbewahrscheinlichkeit einer Population. Die Frage, wie diese Wahrscheinlichkeit durch Veränderung einzelner Faktoren beeinflusst wird, wird dabei jedoch nicht beantwortet. Darauf aufbauend wäre somit interessant zu untersuchen, ob sich die Aussterbewahrscheinlichkeit linear oder proportional zur durchschnittlichen Kinderanzahl verhält.

Literatur

[1] A. Lambert, Population Dynamics and Random Geneaogies. *Stochastic Models*. 24:1, pp. 45-163, 2008.

[2] K. B. Athreya, P. E. Ney, *Branching Processes*, Springer Verlag Berlin, 1972.

[3] G. Alsmeyer, *Der einfache Galton-Watson-Prozeß*, zu finden unter http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/alsmeyer/Skripten/GWP01.pdf

[4] J. Cuno, *Galton-Watson-Bäume*, Vorlesungsskript 2005, zu finden unter http://ismi.math.uni-frankfurt.de/hutzenthaler/SeminarSS05/9CunoJohannes.pdf