

# Schwellenverhalten (Konvergenzverhalten)

Seminar stochastische Modelle in der Epidemiologie

Jasmin Fisel und Jana Geller

27. Mai 2011

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Fall 1: <math>\frac{m_n}{n}</math> konvergiert gegen <math>\mu &gt; 0</math> für <math>n</math> gegen <math>\infty</math></b>	<b>3</b>
2.1	Gegebene Größen . . . . .	3
2.2	Vorüberlegungen zum Theorem . . . . .	3
2.3	Theorem . . . . .	5
2.4	Graphische Bedeutung . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Fall 2: <math>m_n = m</math> für alle <math>n</math></b>	<b>6</b>
3.1	Gegebene Größen . . . . .	6
3.2	Vorüberlegungen zum Theorem . . . . .	7
3.3	Theorem . . . . .	10
3.4	Graphische Bedeutung . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Ausblick</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>11</b>

# 1 Einführung

Bei Betrachtung von großen Populationen ergeben sich nun zwei verschiedene Möglichkeiten der Verteilung des Verhältnisses von infizierten und anfälligen Personen. Der erste Fall, welchen wir genauer betrachten, geht von einem gleichbleibenden Verhältnis aus, der zweite Fall dagegen von einer festen Zahl infizierter Personen.

## 2 Fall 1: $\frac{m_n}{n}$ konvergiert gegen $\mu > 0$ für $n$ gegen $\infty$

Das Verhältnis von infizierten zu anfälligen Personen bleibt gleich.

### 2.1 Gegebene Größen

Aus den vorherigen Vorträgen sind einige Hilfsprozesse und Größen bereits bekannt.

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{I}}_n(t) &= \mathcal{I}_n(nt) \quad (\text{mit } \mathcal{I}: \text{ Infektionsdruckprozess}) \\ \bar{\mathcal{Q}}_n(t) &= \frac{\mathcal{Q}(t)}{n} \quad (\text{mit } \mathcal{Q}: \text{ Schwellenprozess}) \\ \bar{C}_n(t) &= \bar{\mathcal{Q}}_n(\bar{\mathcal{I}}_n(t)) \\ Z &= \min\{t \geq 0 : \mathcal{Q}(\mathcal{I}(t+m)) = t\}\end{aligned}$$

### 2.2 Vorüberlegungen zum Theorem

Das endgültige Größenverhältnis aus Populationsgröße und Anzahl der anfälligen Personen wird wie folgt dargestellt:

$$\frac{Z_n}{n} = \frac{1}{n} \min \left\{ t \geq 0 : \bar{C}_n \left( \frac{t}{n} + \frac{m_n}{n} \right) = \frac{t}{n} \right\}$$

BEWEIS:

Durch Umschreiben und Einsetzen der gegebenen Größen erhalten wir die nachstehenden Formeln.

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{I}}_n(t) = \mathcal{I}_n(nt) &\Rightarrow \mathcal{I}_n(t+m_n) = \bar{\mathcal{I}}_n\left(\frac{t}{n} + \frac{m_n}{n}\right) \\ \bar{\mathcal{Q}}_n(t) = \frac{\mathcal{Q}(t)}{n} &\Leftrightarrow \mathcal{Q}_n(t) = n\bar{\mathcal{Q}}_n(t) \\ n\bar{\mathcal{Q}}_n\left(\bar{\mathcal{I}}_n\left(\frac{t}{n} + \frac{m_n}{n}\right)\right) = t &\Leftrightarrow \bar{\mathcal{Q}}_n\left(\bar{\mathcal{I}}_n\left(\frac{t}{n} + \frac{m_n}{n}\right)\right) = \frac{t}{n}\end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Ergebnisse in die Gleichung  $Z = \min\{t \geq 0 : \mathcal{Q}(\mathcal{I}(t+m)) = t\}$  und dem Dividieren von  $n$  auf beiden Seiten der Gleichung erhalten wir das Gesuchte.  $\square$

Im Folgenden benennen wir  $Z'_n$  mit  $Z_n + m_n$  und schließen so die zu Beginn infektiösen Personen in die endgültige Größe mit ein. Außerdem verwenden wir, dass  $\bar{C}_n(t)$  in Wahrscheinlichkeit gegen  $1 - e^{-\lambda t}$  und, gemäß unserer Annahme,  $\frac{m_n}{n}$  gegen  $\mu > 0$  konvergiert.

Mit den oben genannten Größen kann man folgern, dass  $\bar{Z}'_n = \frac{Z'_n}{n}$  gegen  $\tau$  konvergiert, was die Lösung von der Gleichung  $1 - e^{-\lambda t} = \tau - \mu$  ist, welche sich umschreiben lässt zu  $1 + \mu - \tau = e^{-\lambda t}$ .

Wir richten nun unser Augenmerk auf eben diese Gleichung und geben ihr somit eine Nummer.

$$1 + \mu - \tau = e^{-\lambda t} \quad (1)$$

BEWEIS (ZU 1):

$$\bar{Z}'_n = \frac{Z'_n}{n} = \frac{Z_n + m}{n} = \underbrace{\frac{Z_n}{n}}_{\rightarrow \frac{1}{n} \min(1 - e^{-\lambda t})} + \underbrace{\frac{m}{n}}_{\rightarrow \mu} \rightarrow \tau$$

Da  $Z_n = \min\{t \geq 0 : \bar{C}_n(t) = \frac{t}{n}\}$  einen Fixpunkt beschreibt, kann man sagen, dass auch  $\bar{C}_n(t)$  selbst zu diesem Zeitpunkt gegen  $1 - e^{-\lambda t}$  konvergiert.

Aus diesen beiden Argumenten folgt nun  $1 + \mu - e^{-\lambda t} = \tau$ . □

Mit anderen Worten kann die Gleichung (1) folgendermaßen veranschaulicht werden:

Da eine bestimmte, gegebene Person mit Wahrscheinlichkeit  $E(e^{-\lambda I/n})$  vermeidet sich zu infizieren, ist die Wahrscheinlichkeit einer solchen Infektion zu entgehen entsprechend der Approximation (2). Dies entspricht der rechten Seite von (1). Des Weiteren bezeichnet die linke Seite von (1) die Wahrscheinlichkeit der Infektion zu entgehen, die gleich dem Anteil der zu Beginn anfälligen Personen, die gesund geblieben sind, ist.

$$[E(e^{-\lambda I/n})]^{Z'_n} \approx \left(1 - \frac{\lambda I}{n}\right)^{n\tau} \approx e^{\lambda \tau} \quad (2)$$

BEWEIS (ZU 2):

$$\begin{aligned} [E(e^{-\frac{\lambda I}{n}})]^{Z'_n} &= \left[E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda I}{n})^k}{k!}\right)\right]^{Z'_n} = [E(1 - \frac{\lambda I}{n} + \dots)]^{Z'_n} = \left[1 - \frac{\lambda E(I)}{n}\right]^{Z'_n} \\ &= \left[1 - \frac{\lambda I}{n}\right]^{Z'_n} \approx \left(1 - \frac{\lambda I}{n}\right)^{n\tau} \approx (e^{-\lambda I})^\tau = e^{-\lambda \tau} \end{aligned}$$

Im ersten Schritt dieses Beweises haben wir die Exponentialfunktion als Reihe geschrieben und dann mit Hilfe der Taylorentwicklung aufgespalten. Danach war es uns auf Grund ihrer Linearität möglich, den Erwartungswert in die einzelnen Elemente hineinzuziehen. Wegen der Konvergenz  $\frac{Z'_n}{n} \rightarrow \tau \Leftrightarrow Z'_n \rightarrow n\tau$  und der Eigenschaft  $E(I) = I$  folgte die erste Approximation. Die Zweite lässt sich dadurch begründen, dass  $(1 - \frac{\lambda I}{n})^n$  gegen  $e^{-\lambda I}$  konvergiert. □

HERLEITUNG (ZGWS FÜR  $Z'_n$ ):

Wir wollen einen zentralen Grenzwertsatz herleiten um das Grenzverhalten der Epidemie genauer beschreiben zu können.

Aus den beiden Definitionen  $\bar{Z}'_n = \bar{C}_n(\bar{Z}'_n) + \frac{m_n}{n}$  und  $\tau = 1 - e^{-\lambda \tau} + \mu$  ergibt sich aus  $\sqrt{n}(\bar{Z}'_n - \tau)$  der erste Teil des gesuchten ZGWS.

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}(\bar{Z}'_n - \tau) &= \sqrt{n} \left( \bar{C}_n(\bar{Z}'_n) + \frac{m_n}{n} - (1 - e^{-\lambda\tau} + \mu) \right) \\
&= \sqrt{n} \left( \bar{C}_n(\bar{Z}'_n) + \frac{m_n}{n} - [1 - e^{-\lambda\bar{Z}'_n}] + [1 - e^{-\lambda\bar{Z}'_n}] - (1 - e^{-\lambda\tau} + \mu) \right) \\
&= \sqrt{n} \left( \bar{C}_n(\bar{Z}'_n) - [1 - e^{-\lambda\bar{Z}'_n}] + [1 - e^{-\lambda\bar{Z}'_n}] - (1 - e^{-\lambda\tau}) + \left(\frac{m_n}{n} - \mu\right) \right) \\
&= \sqrt{n} \left( \bar{C}_n(\bar{Z}'_n) - [1 - e^{-\lambda\bar{Z}'_n}] \right) + \sqrt{n} \left( [1 - e^{-\lambda\bar{Z}'_n}] - [1 - e^{-\lambda\tau}] \right) + o(1)
\end{aligned}$$

Wir wollen nun den zweiten Teil des ZGWS über die Taylorentwicklung approximieren. Dazu sei  $\tau$  der Entwicklungspunkt zur Variablen  $\bar{Z}'_n$ .

$$\begin{aligned}
f(\bar{Z}'_n) &:= \sqrt{n}(-e^{-\lambda\bar{Z}'_n} + e^{-\lambda\tau}) \stackrel{\text{abl.}}{\Rightarrow} f'(\bar{Z}'_n) = \sqrt{n}(\lambda\tau e^{-\lambda\bar{Z}'_n}) \\
\Rightarrow f(\tau) + \frac{f'(\tau)}{1!}(\bar{Z}'_n - \tau) &= \sqrt{n}(-e^{-\lambda\tau} + e^{-\lambda\tau}) - \sqrt{n}(\lambda\tau e^{-\lambda\tau})(\bar{Z}'_n - \tau) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau} \sqrt{n}(\bar{Z}'_n - \tau) \\
\Rightarrow \sqrt{n}(\bar{Z}'_n - \tau) &= \sqrt{n} \left( \bar{C}_n(\bar{Z}'_n) - [1 - e^{-\lambda\bar{Z}'_n}] \right) + \lambda\tau e^{-\lambda\tau} \sqrt{n}(\bar{Z}'_n - \tau) + o(1)
\end{aligned}$$

Alle etwaigen Fehler, die durch die Approximation in der Taylorentwicklung entstehen, werden in  $o(1)$  verschoben, weshalb die Gleichheit gilt. Somit ist die nun entstandene Gleichung der gesuchte zentrale Grenzwertsatz.

Auf Grund von Überlegungen des vorherigen Kapitels schließen wir, dass der ZGW gegen eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 0 und Varianz  $\frac{e^{-\lambda\tau}(1-e^{-\lambda\tau}) + \lambda^2\sigma^2\tau e^{-2\lambda\tau}}{(1-\lambda\tau e^{-\lambda\tau})^2}$  konvergiert. Diese Varianz ist wohl-definiert falls  $\lambda\tau e^{-\lambda\tau} < 1$  gilt, da die Funktion konvex ist (=Eindeutigkeit) und der ZGWS gilt (=Existenz).

BEWEIS (VON  $\bar{Z}'_n$ ):

Weil  $\bar{C}_n(\frac{t}{n} + \frac{m_n}{n}) = \frac{t}{n}$  einen Fixpunkt für den Zeitpunkt  $t$  bezeichnet, muss

$\frac{Z_n}{n} = \frac{1}{n} \min\{t \geq 0 : \bar{C}_n(\frac{t}{n} + \frac{m_n}{n}) = \frac{t}{n}\}$  ebenfalls für genau dieses  $t$  gelten.

Da  $\frac{t}{n} + \frac{m_n}{n} = \frac{Z_n}{n} + \frac{m_n}{n} = \bar{Z}'_n$  ist, folgt mit der uns bereits bekannten Gleichung  $\bar{Z}'_n = \frac{Z_n}{n} + \frac{m_n}{n}$  die Gleichheit  $\bar{Z}'_n = \bar{C}_n(\bar{Z}'_n) + \frac{m_n}{n}$ .  $\square$

## 2.3 Theorem

### Theorem 1:

Betrachten wir eine Folge von epidemischen Prozessen  $E_{n,m_n}(\lambda, I)$  und nehmen wir für diese an, dass  $\frac{m_n}{n} \rightarrow \mu > 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. Definieren wir uns dazu  $\tau$  als die Lösung von (1) und die endgültige epidemische Größe als  $Z_n$  mit  $Z'_n = Z_n + m_n$ .

Dann konvergiert die Folge  $\sqrt{n}(\frac{Z'_n}{n} - \tau)$  gegen eine normalverteilten Zufallsvariable mit Mittelwert 0 und Varianz  $\frac{\rho(1-\rho) + \lambda^2\sigma^2\tau\rho^2}{(1-\lambda\rho)^2}$ , wobei  $\rho = 1 + \mu - \tau = e^{\lambda\tau}$  bezeichnet.

## 2.4 Graphische Bedeutung

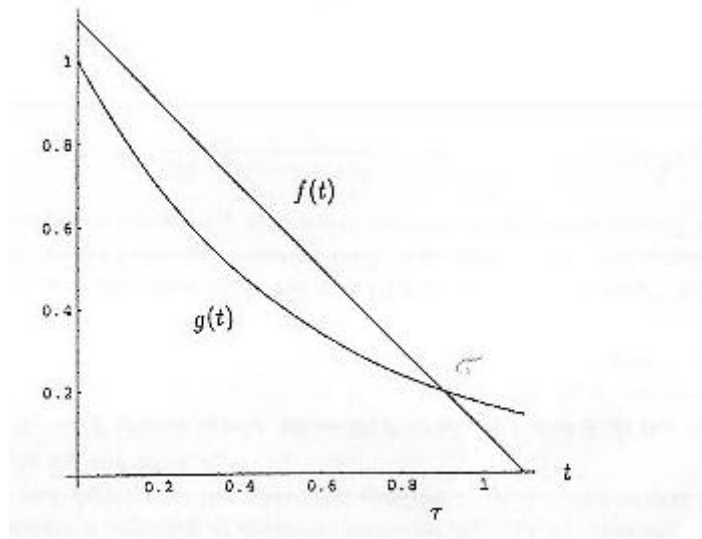


Abbildung 1: Graphische Veranschaulichung von  $\tau$ , der Lösung von (1), mit  $\mu = 0.1$ ,  $\lambda = 1.8$  und  $\iota = 1$

In der obigen Abbildung ist die Gültigkeit des Theorems anschaulich dargestellt. Dafür sind die beiden Funktionen  $f(t) = 1 + \mu - t$  und  $g(t) = e^{-\lambda t}$  für den Fall  $\mu = 0.1$ ,  $\lambda = 1.8$  und  $\iota = 1$  eingezeichnet. Der Schnittpunkt der beiden Kurven definiert die eindeutige Lösung  $\tau \approx 0,903$ . Die Ableitung der Exponentialfunktion muss am Kreuzungspunkt  $\tau$  echt größer sein als  $-1$ , was zur gewünschten Folgerung führt. Die Bedingung der Wohldefiniertheit der Varianz hat einen praxisnahen Bezug zur Realität, der sich folgenderweise beschreiben lässt:

Am Anfang ist die grundlegende Reproduktionszahl durch  $R_0 = \lambda \iota$  gegeben, was bedeutet, dass eine infizierte Person ihre Krankheit in einer großen Population an durchschnittlich  $\lambda \iota$  Anfällige weitergibt. Da jedoch selbst nach einem solch großen Ausbruch noch  $1 - (\tau - \mu)$  der anfälligen Personen einer Infektion entgehen konnten, entspricht eine zweite Einführung der Krankheit in die selbe Population der effektiven Basisreproduktionszahl  $\lambda \iota (1 - (\tau - \mu)) = \lambda \iota e^{-\lambda \tau}$ . Diese Zahl muss kleiner sein als 1, da anderenfalls die Epidemie nicht an erster Stelle stoppen würde.

## 3 Fall 2: $m_n = m$ für alle n

Das Verhältnis von infizierten ( $m$ ) und anfälligen ( $n$ ) Personen ändert sich, da  $m$  fest aber  $n$  variabel ist.

### 3.1 Gegebene Größen

Aus dem approximierten Ergebnis des Verzweigungsprozesses, welches besagte, dass die Endgröße  $Z_n$  des Epidemischen Prozesses  $E_{n,m}(\lambda, 1)$  für  $n \rightarrow \infty$  fast sicher gegen die absolute Anzahl der Nachkommen konvergiert, haben wir mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq t) = q^m$  die

Wahrscheinlichkeit nicht angesteckt zu werden, bestimmt. Dabei bezeichnet  $q^m$  die Aussterbewahrscheinlichkeit des Annäherungsprozesses.

### 3.2 Vorüberlegungen zum Theorem

Wähle nun eine Folge  $t_n$  so dass  $\frac{t_n}{n} \rightarrow 0$  und  $\frac{t_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. Definiere weiter  $\tau$  als das nichttriviale Ergebnis des Terms  $1 - e^{-\lambda t}$ . Des Weiteren zeigen wir die Gültigkeit dreier Wahrscheinlichkeiten an ihren Grenzen.

$$1 - e^{-\lambda t} = \tau \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq t_n) = q^m \quad (4)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P(t_n < Z_n < n\tau - c\sqrt{n}) = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n > n\tau + c\sqrt{n}) = 0 \quad (6)$$

(4) bis (6) zusammengefasst bedeuten, dass wenn  $n$  groß ist und die Verzweigungsapproximation zerfällt, die Endgröße mit hoher Wahrscheinlichkeit (für einige große feste  $c$ ) im Intervall  $[n\tau - c\sqrt{n}, n\tau + c\sqrt{n}]$  liegt. Wobei Scalia-Tomba (1985, 1990) bewiesen hat, dass der obige Zentrale Grenzwertsatz (mit  $\mu = 0$ ) im Falle eines großen Ausbruchs gilt.

BEWEIS (VON 4):

Wir beginnen mit dem Beweis von (4), der sich jedoch eher an Ball und Clancy (1993) als Scalia-Tomba orientiert. Definieren wir  $P_t[E_m(\lambda, I)]$  als die Wahrscheinlichkeit, dass der Verzweigungsprozess  $E_m(\lambda, I)$  insgesamt  $t$  Nachkommen hat (inklusive der  $m$  Vorfahren). Wenn nun  $Z_n \leq t_n$  gilt, wird jeder infektiöse Kontakt anfälliger Personen von der Folge  $\lambda_n = \frac{\lambda(n+m-t_n)}{n}$  nach unten beschränkt. Daraus, und aus der Stetigkeit von  $t_n$ , erschließt sich  $P(Z_n \leq t_n) \leq \sum_{t=0}^{t_n} P(Z'_n = t) = \sum_{t=0}^{t_n} P_t[E_m(\lambda_n, I)] \leq \sum_{t=0}^{\infty} P_t[E_m(\lambda_n, I)]$ , wobei die rechte Seite die Aussterbewahrscheinlichkeit  $q_n^m$  des modifizierten Verzweigungsprozesses  $E_m(\lambda_n, I)$  ist. Gilt nun weiter  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  für  $n \rightarrow \infty$ , so dass  $q_n \rightarrow q$ , dann folgt  $q^m - \varepsilon \leq P(Z'_n \leq t) \leq P(Z'_n \leq t_n) \leq q^m + \varepsilon$ , solange  $\varepsilon > 0$  gilt und sowohl  $t$  als auch  $n$  groß genug gewählt werden. Somit folgt (4).

Unter der Voraussetzung, dass die Basisreproduktionsrate größer 1 ist, gilt  $R_0 = \lambda > 1$ , andernfalls bleibt nichts mehr zu zeigen.  $\square$

BEWEIS (VON 5):

Gegeben ist  $P(t_n < Z'_n < n\tau - c\sqrt{n})$ . Diese lässt sich durch  $P(C_n(t+m) = t)$  für  $t \in [t_n, n\tau - c\sqrt{n}]$  nach oben abschätzen.

*Begründung.* Da  $Z'_n = Z_n + m_n = \min\{t \geq 0 : \bar{C}_n(\frac{t}{n} + \frac{m_n}{n}) = \frac{t}{n}\} + m_n$  folgt die Ungleichung. Anschaulich heißt das, dass alle Werte der konkaven Funktion zwischen den Fixpunkten, also den Grenzen, oberhalb der Winkelhalbierenden liegen.

$$\begin{aligned}
P(t_n < Z'_n < n\tau - c\sqrt{n}) &\leq P(C_n(t+m) = t \text{ für } t \in [t_n, n\tau - c\sqrt{n}]) \\
&= P(C_n(t+m) = t \text{ für } t \in [t_n, n\tau - c\sqrt{n}]) \\
&= P(n\bar{C}_n\left(\frac{t+m}{n}\right) = t \text{ für } t \in [t_n, n\tau - c\sqrt{n}]) \\
&= P(\bar{C}_n\left(\frac{t+m}{n}\right) = \frac{t}{n} \text{ für } t \in [t_n, n\tau - c\sqrt{n}])
\end{aligned}$$

Auf Grund gewisser Äquivalenzen und dem Konvergenzverhalten von  $\bar{C}_n$  auf  $\tilde{C}_n$  folgt aus der letzten Gleichung die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned}
\bar{C}_n\left(\frac{t+m}{n}\right) = \frac{t}{n} &\Leftrightarrow \sqrt{n}\left(\bar{C}_n\left(\frac{t+m}{n}\right)\right) = \sqrt{n}\frac{t}{n} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{n}\left(\bar{C}_n\left(\frac{t+m}{n}\right)\right) - \sqrt{n}(1 - e^{-\lambda\frac{t+m}{n}}) = \sqrt{n}\frac{t}{n} - \sqrt{n}(1 - e^{-\lambda\frac{t+m}{n}}) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{n}\left(\bar{C}_n\left(\frac{t+m}{n}\right) - (1 - e^{-\lambda\frac{t+m}{n}})\right) = \sqrt{n}\left(\frac{t}{n} - (1 - e^{-\lambda\frac{t+m}{n}})\right) \\
&\Leftrightarrow \tilde{C}_n\left(\frac{t+m}{n}\right) = \sqrt{n}\left(\frac{t}{n} - (1 - e^{-\lambda\frac{t+m}{n}})\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{C}_n\left(\frac{t+m}{n}\right) = \frac{t}{n} - [1 - e^{-\lambda\frac{t+m}{n}}] \\
&\Leftrightarrow [1 - e^{-\lambda\frac{t+m}{n}}] - \frac{t}{n} = -\frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{C}_n\left(\frac{t+m}{n}\right) \\
\Rightarrow P\left([1 - e^{-\lambda\frac{t+m}{n}}] - \frac{t}{n} = -\frac{c}{\sqrt{n}}\tilde{C}_n\left(\frac{t+m}{n}\right) \text{ für } t \in [t_n, n\tau - c\sqrt{n}]\right)
\end{aligned}$$

Als nächstes suchen wir die Werte von  $t$  aus dem gegebenen Intervall, welche die obige Gleichung erfüllen. Da die linke Seite eine konkave Funktion von  $t$  ist, reicht es die Endpunkte zu überprüfen.

Also setzen wir erst  $t = n\tau - c\sqrt{n}$  ein.

$$\begin{aligned}
[1 - e^{-\lambda\frac{t+m}{n}}] - \frac{t}{n} &= \left[1 - e^{-\lambda\left(\frac{n\tau - c\sqrt{n} + m}{n}\right)}\right] - \frac{n\tau - c\sqrt{n}}{n} \\
&= \left[1 - e^{-\lambda\tau} e^{\lambda\frac{c}{\sqrt{n}}} e^{-\lambda\frac{m}{n}}\right] - \tau + \frac{c}{\sqrt{n}} \\
&= \left[1 - e^{-\lambda\tau} e^{\lambda\frac{c}{\sqrt{n}}}\right] e^{-\lambda\frac{m}{n}} + (1 - e^{-\lambda\frac{m}{n}}) - \tau + \frac{c}{\sqrt{n}} \\
&= \left[1 - e^{-\lambda\tau} \left(1 + \frac{\lambda c}{\sqrt{n}}\right)\right] e^{-\lambda\frac{m}{n}} + (1 - e^{-\lambda\frac{m}{n}}) - \tau + \frac{c}{\sqrt{n}} \\
&= \left[1 - e^{-\lambda\tau} - \frac{\lambda c}{\sqrt{n}} e^{-\lambda\tau}\right] e^{-\lambda\frac{m}{n}} + (1 - e^{-\lambda\frac{m}{n}}) - \tau + \frac{c}{\sqrt{n}} \\
&= \left[1 - e^{-\lambda\tau} - \frac{\lambda c}{\sqrt{n}} e^{-\lambda\tau}\right] \cdot 1 + \frac{c}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= -\frac{\lambda c}{\sqrt{n}} e^{-\lambda\tau} + \frac{c}{\sqrt{n}} + 1 - e^{-\lambda\tau} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{c}{\sqrt{n}}(-\lambda e^{-\lambda\tau} + 1) + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$



Wenn  $c$  nun groß genug gewählt wird, bleibt die Folge immer unterhalb  $\frac{|C_n(t)|}{\sqrt{n}}$ .

Weiter setzen wir  $t = t_n$

$$\begin{aligned}
\left[1 - e^{-\lambda\left(\frac{t+m}{n}\right)}\right] - \frac{t}{n} &= \left[1 - e^{-\lambda\frac{t_n}{n}} e^{-\lambda\frac{m}{n}}\right] - \frac{t_n}{n} \\
&= (1 - e^{-\lambda\frac{t_n}{n}})e^{-\lambda\frac{m}{n}} + (1 - e^{-\lambda\frac{m}{n}}) - \frac{t_n}{n} \\
&= (1 - e^{-\lambda\frac{t_n}{n}})e^{-\lambda\frac{m}{n}} - \frac{t_n}{n} + (1 - e^{-\lambda\frac{m}{n}}) \\
&= \left(1 - \left(1 - \frac{\lambda t_n}{n}\right)\right) - \frac{t_n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(1 - 1 + \frac{\lambda t_n}{n}\right) - \frac{t_n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= (\lambda - 1)\frac{t_n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Da wir  $\lambda > 1$  annehmen, gilt auch hier, dass das Ergebnis stets oberhalb der Folge  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  ist, wenn  $\frac{t_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. Damit ist (5) bewiesen.  $\square$

BEWEIS (VON 6):

Gegeben sei hier (mit der Begründung aus (5)):

$$\begin{aligned}
P(Z_n > n\tau + c\sqrt{n}) &\geq P(C_n(t+m) = t \text{ für } t \in [n\tau + c\sqrt{n}, \infty)) \\
&= P\left(\left[1 - e^{-\lambda\frac{t+m}{n}}\right] - \frac{t}{n} = -\frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{C}_n\left(\frac{t+m}{n}\right) \text{ für } t \in [n\tau + c\sqrt{n}, \infty)\right)
\end{aligned}$$

Auch hier müssen wir nur die Grenze  $t = n\tau + c\sqrt{n}$  überprüfen.

$$\begin{aligned}
\left[1 - e^{-\lambda\left(\frac{t+m}{n}\right)}\right] - \frac{t}{n} &= \left[1 - e^{-\lambda\left(\frac{n\tau + c\sqrt{n} + m}{n}\right)}\right] - \frac{n\tau + c\sqrt{n}}{n} \\
&= \left[1 - e^{-\lambda\tau} e^{-\lambda\frac{c}{\sqrt{n}}} e^{-\lambda\frac{m}{n}}\right] - \tau - \frac{c}{\sqrt{n}} \\
&= \left[1 - e^{-\lambda\tau} e^{-\lambda\frac{c}{\sqrt{n}}}\right] e^{-\lambda\frac{m}{n}} + (1 - e^{-\lambda\frac{m}{n}}) - \tau - \frac{c}{\sqrt{n}} \\
&= \left[1 - e^{-\lambda\tau} \left(1 - \frac{\lambda c}{\sqrt{n}}\right)\right] e^{-\lambda\frac{m}{n}} + (1 - e^{-\lambda\frac{m}{n}}) - \tau - \frac{c}{\sqrt{n}} \\
&= \left[1 - e^{-\lambda\tau} + \frac{\lambda c}{\sqrt{n}} e^{-\lambda\tau}\right] e^{-\lambda\frac{m}{n}} + (1 - e^{-\lambda\frac{m}{n}}) - \tau - \frac{c}{\sqrt{n}} \\
&= \left[1 - e^{-\lambda\tau} + \frac{\lambda c}{\sqrt{n}} e^{-\lambda\tau}\right] \cdot 1 - \frac{c}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\lambda c}{\sqrt{n}} e^{-\lambda\tau} - \frac{c}{\sqrt{n}} + 1 - e^{-\lambda\tau} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{c}{\sqrt{n}}(\lambda e^{-\lambda\tau} - 1) + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$\square$

### 3.3 Theorem

#### Theorem 2:

Wir wählen eine Folge von epidemischen Prozessen  $E_{n,m_n}(\lambda_n, I)$  und nehmen für diese an, dass  $m_n = m$  für alle  $n$  gilt. Dazu definieren wir uns  $\tau$  als die nichttriviale Lösung von (3) und  $Z_n$  als epidemische Endgröße mit  $Z_n = Z_n + m$ .

Für den Fall  $\lambda\tau \leq 1$  konvergiert  $Z_n$  fast sicher gegen  $Z$ . Dabei gilt  $P(Z < \infty) = 1$  und  $Z$  bezeichnet die totale Nachkommenschaft in einem stetigen, zeitabhängigen Verzweigungsprozess  $E_m(\lambda, I)$ , der von  $m$  Vorfahren eingeleitet wurde.  $\lambda$  stellt dabei die Entbindungsrate einzelner Individuen während der von  $I$  abhängigen Lebenszeit dar.

Für den Fall  $\lambda\tau > 1$  konvergiert  $Z_n$  immer noch gegen  $Z$ , aber nun gilt  $P(Z < \infty) = q^m$  mit der Aussterbewahrscheinlichkeit  $q^m$  des Verzweigungsprozesses. Mit Wahrscheinlichkeit  $1 - q^m$  konvergiert die Folge  $\sqrt{n}(\frac{Z_n}{n} - \tau)$  gegen eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 0 und Varianz  $\frac{\rho(1-\rho)+\lambda^2\sigma^2\tau\rho^2}{(1-\lambda\tau\rho)^2}$ , mit  $\rho = 1 - \tau$ .

### 3.4 Graphische Bedeutung

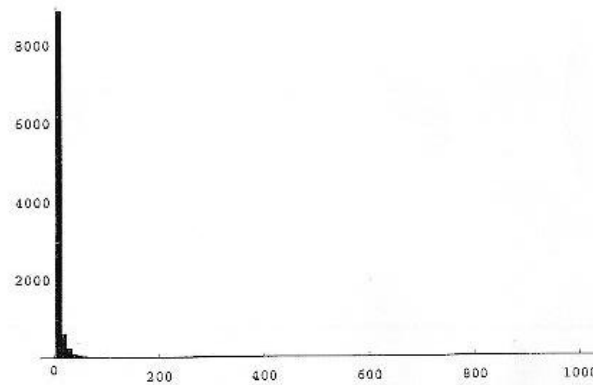


Abbildung 2: Histogramm der endgültigen Größen für 10000 Simulationen von  $E_{m,n}(\lambda, I)$  mit  $m = 1$ ,  $n = 1000$  und  $R_0 = \lambda\tau = 0.8$ , d.h. unterhalb des Schwellenwertes

Aus dem Satz folgt im Besonderen dass im Falle  $R_0 > 1$  das Endgrößenverhältnis  $\frac{Z_n}{n}$  im Punkt 0 in Verteilung gegen eine Zufallsvariable mit Masse  $q^m$  und im Punkt  $\tau$  gegen eine mit Masse  $1 - q^m$  konvergiert. In den Abbildungen 3 und 4 sind Histogramme der Endgröße in 10000 Simulationen dargestellt. Dabei hat jeder Balken die Breite 10. Beide Abbildungen behandeln die Markov-Version des Standard-Epidemie-Modells (4) mit einer Anfangspopulation von  $n=1000$  anfälligen und  $m=1$  infektiösen Individuen. Abbildung 2 zeigt die Häufigkeitsverteilung bei  $R_0 = 0,8 < 1$ , während Abbildung 3 dem Fall  $R_0 = 1,5 > 1$  entspricht.

Durch die Bilder wird klar, dass größere Ausbrüche nur im letzteren Fall auftreten. Dementsprechend ist die Lösung von (3) bei  $R_0 = \lambda\tau = 1,5$   $\tau \approx 0.583$  mit vernachlässigbarem anfänglichen Anteil infektiöser  $\mu$ . Der Varianzausdruck vom Theorem ist 3.139. Der Satz sagt somit, dass die Verteilung der großen Ausbruchgrößen annähernd Gauss-verteilt mit Mittelwert  $n\tau = 583$  und Standardabweichung  $\sqrt{3,139n} \approx 56$  sein sollte. Auch das ist in den Histogrammen gut zu erkennen.

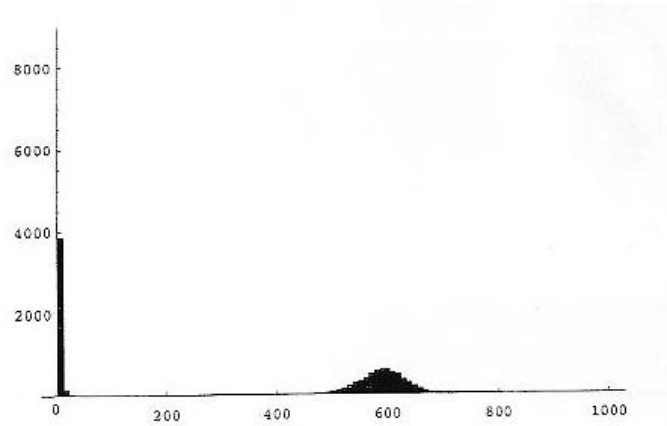


Abbildung 3: Histogramm der endgültigen Größen für 10000 Simulationen von  $E_{m,n}(\lambda, I)$  mit  $m = 1$ ,  $n = 1000$  und  $R_0 = \lambda\iota = 1.5$ , also oberhalb des Schwellenwertes

## 4 Ausblick

Wir haben die Erkenntnisse der vorgehenden Vorträge auf eine gegen  $\infty$  strebende Population angewendet. Dabei sind wir davon ausgegangen, dass eine Person sich nur einmal infizieren kann. Dieser Aspekt vereinfacht zwar die Rechnung, doch in der Realität findet sich dieser Sonderfall relativ selten. Des Weiteren geht unser Modell von einer gleichmäßigen Durchmischung von infizierten und anfälligen Personen in einer Population aus und ignoriert zudem, dass es auch unterschiedliche Typen von Infizierbarkeit und Anfälligkeit gibt. Ebenso wird die räumliche Verteilung der Personen und die daraus resultierende Problematik in der Weitergabe einer Infektion komplett ignoriert.

Ansonsten ist die Unterteilung der Anfangsinfizierung in zwei Fälle durchaus sinnvoll, denn es vereinfacht den Einstieg in die Berechnung des Konvergenzverhaltens einer Epidemie.

## 5 Literaturverzeichnis

Andersson, H., Britton, T., Stochastic Epidemic Models and Their Statistical Analysis. LNS, Springer, 2000.