

# Markov-Ketten

## Übungsblatt 1

Abgabe: 19. April 2011

### Aufgabe 1

Es gebe zwei Typen von Wetter: sonnig und regnerisch. Ist das Wetter an einem Tag sonnig, so sei das Wetter am nächsten Tag sonnig mit Wahrscheinlichkeit 0.8 oder regnerisch mit Wahrscheinlichkeit 0.2. Ist das Wetter an einem Tag regnerisch, so sei das Wetter am nächsten Tag regnerisch mit Wahrscheinlichkeit 0.5 und sonnig mit Wahrscheinlichkeit 0.5. Am Tag 0 herrsche sonniges Wetter.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es am Tag 3 regnet? (Hinweis: es wird nicht spezifiziert, welches Wetter an den Tagen 1 und 2 herrschen soll).
- (b) Gegeben, dass es am Tag 3 regnet, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es auch am Tag 2 geregnet hat?

### Aufgabe 2

Es seien  $P$  und  $Q$  zwei stochastische  $l \times l$ -Matrizen,  $l \in \mathbb{N}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass das Produkt  $PQ$  ebenfalls eine stochastische Matrix ist.
- (b) Es seien  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  mit  $\alpha + \beta = 1$ . Zeigen Sie, dass die konvexe Kombination  $\alpha P + \beta Q$  ebenfalls eine stochastische Matrix ist.

### Aufgabe 3

- (a) Es seien  $X_0, X_1, X_2, \dots$  unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in  $\mathbb{Z}$ . Zeigen Sie, dass  $X_0, X_1, X_2, \dots$  eine Markov-Kette ist.
- (b) Ein fairer Würfel werde unendlich oft geworfen. Bezeichne mit  $N_n$  die Anzahl von Sechsen in den ersten  $n$  Würfeln,  $n \in \mathbb{N}$ . Man setze  $N_0 = 0$ . Zeigen Sie, dass  $N_0, N_1, N_2, \dots$  eine Markov-Kette mit Werten in  $\mathbb{N}_0$  ist und geben Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten an.

### Aufgabe 4

Es seien  $X_0, X_1, X_2, \dots$  und  $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$  zwei Markov-Ketten mit Werten in  $\mathbb{Z}$ . Muss auch  $Z_n := X_n + Y_n$  eine Markov-Kette sein?