Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Malte Spiess

SS 2011
21. 4. 2011

Übungen zu Grenzwertsätze für Zufallsfelder - Blatt 1

Abgabe am 29. April vor der Übung

Für dieses Blatt sei ξ immer ein Markov-Feld auf dem endlichen Graphen $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$, wobei $\xi(t)$ für alle $t \in \mathbb{V}$ in den abzählbaren Wertebereich $S \subset \mathbb{R}$ abbildet.

Aufgabe 1
Zeige, dass die Markov-Eigenschaft

$$\mathbb{P}(\xi(t) = x_t \,\big|\, \xi_{\mathbb{V}\setminus\{t\}} = x_{\mathbb{V}\setminus\{t\}}) = \mathbb{P}(\xi(t) = x_t \,\big|\, \xi_{\partial\{t\}} = x_{\partial\{t\}})$$

äquivalent ist zu der Beziehung

$$\mathbb{E}\left[f(\xi(t)) \,\big|\, \xi_{\mathbb{V}\setminus\{t\}} = x_{\mathbb{V}\setminus\{t\}}\right] = \mathbb{E}\left[f(\xi(t)) \,\big|\, \xi_{\partial\{t\}} = x_{\partial\{t\}}\right]$$

für beliebige beschränkte Funktionen $f : S \to \mathbb{R}$. (5)

Aufgabe 2
Es sei $\mathbb{G}_A = (A, \mathbb{E}_A)$ ein Untergraph von $\mathbb{G}$, d.h. $A \subset \mathbb{V}$, und $\mathbb{E}_A$ ist die Menge aller Kanten aus $\mathbb{E}$, die Knoten innerhalb von A verbinden.
Zeige: für $\partial A = \emptyset$ ist $\xi_A = \{\xi(t), t \in A\}$ ein Markov-Feld auf $\mathbb{G}_A$. (3)

Aufgabe 3
Es sei $M = \{t \in \mathbb{V} : \partial\{t\} = \emptyset\}$ die Menge aller Knoten ohne Nachbar. Zeige, dass

(a) die Menge $\xi_M = \{\xi(t), t \in M\}$ aus unabhängigen Zufallsvariablen besteht, (3)

(b) ξ_M unabhängig von $\xi_{\mathbb{V}\setminus M}$ ist. (2)

Aufgabe 4
Es sei $\tilde{\mathbb{G}} = (\mathbb{V}, \tilde{\mathbb{E}})$ ein weiterer Graph auf den selben Knoten aber mit einem anderen Kantensystem. Ist das Markov-Feld ξ auf $\mathbb{G}$ auch ein Markov-Feld auf $\tilde{\mathbb{G}}$? (3)

Aufgabe 5 (Gibbs'sches Variationsprinzip)
Die sogenannte *freie Energie* $E(\mathbb{E}, Q) - \mathcal{H}(Q)$ erfüllt die Ungleichung

$$E(\mathbb{E}, Q) - \mathcal{H}(Q) \geq -\log Z,$$

wobei $Z = \sum_{\omega \in S^{\mathbb{V}}} \exp\{-\mathbb{E}(\omega)\}$.

(a) Zeige: Für $Q = \mathbb{P}$, wobei $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{Z}\exp\{-\mathbb{E}(\omega)\}$ gilt die Gleichheit. (2)

(b) Weise nach, dass die Ungleichung für beliebige Wahrscheinlichkeitsmaße Q gilt. (4*)

Mögliche Vorgehensweise: Setze für ein $\omega_0 \in S^{\mathbb{V}}$ die Wahrscheinlichkeit $Q(\omega_0) = 1 - \sum_{\omega \in S^{\mathbb{V}}\setminus\{\omega_0\}} Q(\omega)$ und zeige, dass die Funktion in Abhängigkeit der $Q(\omega)$, wobei $\omega \in S^{\mathbb{V}} \setminus \{\omega_0\}$ nur dieses eine Minimum hat.

Aufgabe 6
Betrachte einen konkreten Graphen $\mathbb{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$, wobei $\mathbb{V} = \{s_1, \ldots, s_5\}$, und $\mathbb{E}$ nur aus den Kanten (s_1, s_2) und (s_3, s_4) besteht. Als Zustandsraum betrachten wir $S = \{0, 1\}$. Dabei sei die Energie definiert als $\mathbb{E}(\omega) = \sum_{i=1}^{5} \omega_i - 3(\mathbb{1}\{\omega_1 + \omega_2 = 2\} + \mathbb{1}\{\omega_3 + \omega_4 = 2\})$, also die Anzahl der Elemente $s \in S$ mit $\omega_s = 1$ minus 3 mal die Anzahl der Nachbarn, bei denen ω jeweils 1 ist.

(a) Berechne das zugehörige Gibbs-Maß $\mathbb{P}$ inklusive der Normierungskonstante Z. (3)

(b) Welchen Wert hat $\mathbb{P}(\{(1, 1, 0, 0, 0)\})$? (1)

(c) Berechne das kanonische Potenzial $\mathbb{V}_{\{s_1, s_2\}}((1, 0, 0, 0, 1))$. (2)