Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Malte Spiess

SS 2011
5. 5. 2011

Übungen zu Grenzwertsätze für Zufallsfelder - Blatt 2

Abgabe am 13. 5. vor der Übung

Aufgabe 1
Zeige, dass für Zufallsfelder ξ mit strikt positiver Verteilung gilt, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) ξ ist Markovsch,

(ii) für beliebige $x \in S^{\mathbb{V}}$ und $T \subset \mathbb{V}$ gilt:

$$\mathbb{P}(\xi_T = x_T \mid \xi_{\mathbb{V}\setminus T} = x_{\mathbb{V}\setminus T}) = \mathbb{P}(\xi_T = x_T \mid \xi_{\partial T} = x_{\partial T}).$$

(5)

Aufgabe 2
Finde ein Beispiel für ein Zufallsfeld, welches

(a) Markov ist, aber nicht Gibbs, (1)

(b) Gibbs ist, aber nicht Markov. (2)

Aufgabe 3
Es sei $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)^\top$ ein Gauß'sches Zufallsfeld. Ferner seien $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ disjunkt.

Zeige mit Mitteln der Vorlesung, dass die Zufallsvektoren ζ_I und ζ_J genau dann unabhängig sind, wenn $\operatorname{Cov}(\zeta_i, \zeta_j) = 0$ gilt für beliebige $i \in I, j \in J$. (5)

Aufgabe 4
Es sei $\xi = \{\xi(t), t \in T\}$ ein Zufallsfeld. Zeige, dass ξ genau dann aus unabhängigen Zufallsvariablen besteht, wenn für beliebige disjunkte Teilmengen $I = \{s_1, \dots, s_k\}$ und $J = \{t_1, \dots, t_m\}$ von T und beliebige beschränkte Borel-messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\operatorname{Cov}\left(f(\xi(s_1), \dots, \xi(s_k)),\ g(\xi(t_1), \dots, \xi(t_m))\right) = 0.$$

(6)

Aufgabe 5
Zeige, dass für beliebige σ-Algebren $\mathcal{B}, \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ gilt, dass $\alpha(\mathcal{B}, \mathcal{D}) \leq 1/4$. (3)

Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe ohne Wertung)
Weise nach, dass bei einem assoziierten Zufallsvektor ξ auch der Vektor der Ordnungsstatistiken der Komponenten von ξ assoziiert ist.