

## Übungen zu Grenzwertsätze für Zufallsfelder - Blatt 3

Abgabe am 27. 5. vor der Übung

### Aufgabe 1

- (a) Finde ein Beispiel für zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , die positiv korreliert sind, aber bei denen der Zufallsvektor  $(X, Y)^\top$  nicht positiv assoziiert ist. (4)
- (b) Zeige: Für beliebige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , welche die Voraussetzungen aus Teil (a) erfüllen, gilt auch, dass  $X$  und  $-Y$  nicht negativ assoziiert sind. (2)

### Aufgabe 2

Es sei  $\xi$  ein Zufallsfeld auf  $T$ . Zeige, dass  $\xi$  genau dann assoziiert ist, wenn für beliebige endliche  $I \subset T$  gilt, dass

$$\mathbb{P}(\xi_I \in A \cap B) \geq \mathbb{P}(\xi_I \in A) \mathbb{P}(\xi_I \in B)$$

für beliebige messbare Mengen  $A, B \subset \mathbb{R}^I$  mit  $x \in A \Rightarrow x + c \in A$  für beliebige  $c \geq 0$  (und analog für  $B$ ). (4)

### Aufgabe 3

Zeige: Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind genau dann assoziiert, wenn  $\text{Cov}(X, Y) \geq 0$  gilt. (4)

### Aufgabe 4

Betrachte den Zufallsvektor  $(X, Y)^\top$ , wobei für  $i, j = 0, 1, 2$  gelte, dass  $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_{ij}$ , und die  $p_{ij}$  durch

$$\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/64 & 0 & 1/8 \\ 0 & 9/32 & 0 \\ 1/8 & 0 & 15/64 \end{pmatrix}$$

gegeben sind.

Zeige, dass  $(X, Y)^\top$

- (a) positiv assoziiert ist, (3)
- (b) aber nicht assoziiert. (3)