Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Malte Spiess

SS 2011
26. 5. 2011

Übungen zu Grenzwertsätze für Zufallsfelder - Blatt 4

Abgabe am 3. 6. vor der Übung

Aufgabe 1

Zeige, dass für Zufallsfelder $\xi = \{\xi_j, j \in \mathbb{Z}^d\} \in (BL, \theta)$ die Eigenschaft

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |\operatorname{Cov}(\xi_0, \xi_j)| < \infty$$

immer erfüllt ist. (4)

Hinweis: Konstruiere hierfür zunächst ein weiteres Zufallsfeld ψ mit $\operatorname{Cov}(\psi_0, \psi_j) = |\operatorname{Cov}(\xi_0, \xi_j)|$, das auch (BL, θ)-abhängig ist für die gleiche Folge $(\theta_r)_{r \in \mathbb{N}_0}$.

Aufgabe 2

An einer Universität gibt es 10 befreundete Studenten, die häufig die gleichen Vorlesungen besuchen. Dabei ist es doppelt so wahrscheinlich, dass eine bestimmte Gruppe mit $n+1$ der Studenten eine bestimmte Vorlesung besucht, wie, dass (genau) bestimmte n der 10 Freunde die Vorlesung besuchen. Dabei hängt die Wahrscheinlichkeit nur von der Anzahl ab.

Zeige, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Potenzmenge der Gruppe der 10 Studenten, das eine Gruppe abbildet auf der Wahrscheinlichkeit für einen Besuch der Vorlesung genau dieser Gruppe, assoziiert ist. (2)

Aufgabe 3

Betrachte $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ und $Y = X\mathbb{1}\{|X| < c\} - X\mathbb{1}\{|X| \geq c\} \sim \mathrm{N}(0,1)$ für ein $c \geq 0$.

Zeige, dass für ein geeignetes c das Feld (X, Y) nicht quasi-assoziiert ist. (3)

Aufgabe 4

Es sei $X = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ ein (positiv oder negativ) assoziierter Zufallsvektor mit $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$, wobei $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ die euklidische Norm bezeichnet.

Beweise folgende Aussagen:

(a) Für beliebige $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left|\mathbb{E}\exp\{it_1X_1 + \cdots + it_nX_n\} - \mathbb{E}\,e^{it_1X_1} \ldots \mathbb{E}\,e^{it_nX_n}\right| \leq 4 \sum_{j \neq k} |t_j t_k|\,|\operatorname{Cov}(X_j, X_k)|.$$

(5)

Hinweis: Zerlege $e^{it_jX_j}$ in Real- und Imaginärteil.

(b) Wenn die Kovarianzen zwischen den X_j alle 0 sind, besteht X aus unabhängigen Komponenten. (1)