Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Malte Spiess SS 2011
1. 6. 2011

# Übungen zu Grenzwertsätze für Zufallsfelder - Blatt 5

Abgabe am 17. 6. vor der Übung

**Aufgabe 1**
Betrachte eine endliche Menge $W$ und das Gitter $L = 2^W$.

Zeige, dass die FKG-Ungleichungen für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q$ auf $(L, 2^L)$ äquivalent dazu sind, dass für beliebige $r, s \in W$ mit $r \neq s$ und $A \subset W \setminus \{r, s\}$ gilt, dass

$$\lambda(A \cup \{r, s\}) + \lambda(A) \geq \lambda(A \cup \{r\}) + \lambda(A \cup \{s\}),$$

wobei $\lambda(A) = \log Q(A)$. (6)

**Aufgabe 2**
Leite für endliche Mengen $M \subset V$ und Funktionen $f : 2^V \to \mathbb{R}$ folgende Identität her:

$$\sum_{A \subset M} 2^{|A|} \sum_{B:\, A \subset B \subset V} (-1)^{|A|} f(B) = \sum_{B \subset V} (-1)^{|B \cap M|} f(B).$$

(2)

*Hinweis*: Vertausche hierfür die Summation.

**Aufgabe 3** (FKG-Ungleichungen für das Ising-Modell)
Betrachte das Ising-Modell auf der endlichen Menge $V$. Dabei bezeichne für $\omega \in \{-1, 1\}^V$ wie üblich $\mathbb{E}(\omega)$ die Energie und $V_A(\omega)$ das kanonische Potenzial. Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir statt $\omega$ die Menge $A \subset V$, wobei $a \in A$ gdw. $\omega(a) = 1$.

Ferner kann man das *Interaktionspotenzial* $J : 2^V \to \mathbb{R}$ einführen durch die Gleichungen

$$\mathbb{E}(A) = \sum_{B \subset V} J(B)\sigma_B(A), \qquad A \subset V,$$

für die Funktion $\sigma_B(A) = (-1)^{A \cap B} = \sum_{C \subset B} 2^{|C|}(-1)^{|B \setminus C|}\mathbb{1}\{C \subset A\}$. Sie sind wohldefiniert, weil die $\sigma$-Funktionen eine Basis auf dem Raum der linearen Abbildungen von $V$ nach $\mathbb{R}$ bilden, und somit die Werte von $J(\cdot)$ durch die Energiefunktion eindeutig bestimmt sind.

Zeige folgende Aussagen:

(a) Für das kanonische Potential $V_A$ gilt mit $\mathbf{o} = -1$ und dieser Schreibweise

$$V_A(B) = V_{A \cap B}(A \cap B)\, \mathbb{1}\{A \subset B\}.$$

Wir schreiben deshalb $V(A)$ für $V_A(A)$, und somit gilt auch $\mathbb{E}(A) = \sum_{B \subset V} V(B) \mathbb{1}\{A \subset B\}$. (4)

(b) Es gelten die beiden Identitäten

$$V(A) = \sum_{B:A \subset B \subset V} 2^{|A|}(-1)^{|B \setminus A|} J(B) \quad \text{und} \quad J(A) = \sum_{B:A \subset B \subset V} 2^{-|B|} V(B)$$

für beliebige $A \subset V$. (3)

*Hinweis*: Schreibe $\mathbb{E}(A)$ als $\sum_{B \subset V} \ldots \mathbb{1}\{A \subset B\}$ und vergleiche die Koeffizienten.

(c) Wenn das Interaktionspotenzial $J$ die Bedingung erfüllt, dass für beliebige $A \subset V$ und $x, y \in V$ mit $x \neq y$ gilt

$$\sum_{B \in V \setminus \{x,y\}} J(B \cup \{x, y\})\sigma_B(A) \leq 0,$$

dann erfüllt das durch $J$ induzierte Ising-System die FKG-Ungl. (6)

*Hinweis*: Vereinfache zunächst die Ungleichung aus Aufgabe 1 passend für das Modell.