Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Malte Spiess

SS 2011
17. 6. 2011

Übungen zu Grenzwertsätze für Zufallsfelder - Blatt 6

Abgabe am 1. 7. vor der Übung

Aufgabe 1

(a) Zeige, dass die Folge der Quader

$$Q_n = (a^{(n)}, b^{(n)}] = \{x \in \mathbb{R}^d : a_i^{(n)} < x_i \le b_i^{(n)}, i = 1, \dots, d\}$$

genau dann im Sinne von Van Hove gegen unendlich geht, wenn $\min_{1 \le i \le d}(b_i^{(n)} - a_i^{(n)})$ gegen unendlich geht. (3)

(b) Zeige: Für beliebige kompakte konvexe Mengen K mit $b(\mathbf{o}, \delta) \subset K$ für ein $\delta > 0$ geht die Folge der $n\,K = \{x \in \mathbb{R}^d : x = n\,y \text{ für ein } y \in K\}$ im Sinne von Van Hove gegen unendlich. (3)

Hinweis: Die *Steiner-Formel* besagt, dass für konvexe kompakte Mengen das Volumen der Parallelmenge dargestellt werden kann als $\nu_d(K^\varepsilon) = \sum_{i=0}^d c_i\,\varepsilon^{d-i} V_i(K)$ für bestimmte (nicht-negative) Funktionen V_i und (positive) Konstanten c_i, wobei $V_d(K) = \nu_d(K)$ das Volumen von K ist und $c_d = 1$ gilt.

(c) Finde eine Folge von beschränkten abgeschlossenen Mengen V_n, die in dem Sinne gegen $\mathbb{R}^2$ konvergiert, dass für beliebige $x \in \mathbb{R}^2$ ein $n_0(x)$ existiert mit $x \in V_n$ für $n \ge n_0$, die aber nicht im Van-Hove-Sinn gegen unendlich geht. (2)

Aufgabe 2

Überprüfe bei folgenden Funktionen, ob sie langsam variierend sind, wobei bei (d) und (e) zu untersuchen ist, ob es für beliebige langsam variierende Funktionen g und h gilt.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$, (1)

(b) $f(x) = \log(x)$, (1)

(c) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, (2)

(d) $f(x_1, x_2) = g(x_1)\,h(x_2)$, (1)

(e) $f(x_1, x_2) = g(x_1) + h(x_2)$. (3)

Aufgabe 3

Als *Rosenthal-Ungleichung* ist folgendes Ergebnis bekannt:

Für Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit $\mathbb{E}\,X_i = 0$ und $\mathbb{E}\,X_i^p < \infty$, $i = 1, \dots, n$ für ein $p \ge 2$ gilt

$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^p \le c(p)\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,|X_i|^p + \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,X_i^2\right)^{p/2}\right),$$

wobei $c(p)$ eine positive Konstante ist, die nur von p abhängt.

(a) Beweise das Ergebnis aus der Vorlesung, dass für u.i.v. zentrierte Zufallsvariablen $\eta_1, \dots, \eta_n$ und $s \ge 2$ gilt $\mathbb{E}\,|\eta_1 + \cdots + \eta_n|^s = O(n^{s/2})$ für $n \to \infty$. (1)

(b) Zeige dass man die Ordnung auf der rechten Seite in Teil (a) im allgemeinen nicht verbessern kann, finde also ein konkretes Beispiel für $\eta_1, \dots, \eta_n$ und s, bei dem $\mathbb{E}\,|\eta_1 + \cdots + \eta_n|^s \ne O(n^r)$ für beliebige $r < s/2$. (3)