Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Malte Spiess SS 2011
4. 7. 2011

Übungen zu Grenzwertsätze für Zufallsfelder - Blatt 7

Abgabe am 8. 7. vor der Übung

Aufgabe 1
Zeige, dass folgende Funktionen (aus einem Beispiel der Vorlesung) supermodular sind, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$:

(a) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, (2)

(b) $f(x) = \max\limits_{k=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{k} x_i$, (4)

(c) $f(x) = g(h_1(x_1), \dots, h_n(x_n))$, wobei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ supermodular ist und $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton nicht fallend für $i = 1, \dots, n$. (3)

(d) Ist jede komponentenweise nicht-fallende Funktion $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ supermodular? (2)

Aufgabe 2
Es sei $X = (X_1, \dots, X_4)^\top$ ein $(0,1)^4$-wertiger Zufallsvektor auf dem kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum mit Grundraum $\Omega = (0,1)^4$ und σ-Algebra $\mathcal{A} = 2^\Omega$.

Dabei sei $\mathbb{P}(X = \mathbf{o}) = 1/6$ und $\mathbb{P}(A_{1,2}) = \mathbb{P}(A_{3,4}) = 5/12$ für die Ereignisse

$$A_{1,2} = \{0 < X_1 + \dots + X_4 \leq 2\}, \qquad A_{3,4} = \{X_1 + \dots + X_4 > 2\}.$$

Alle 10 Elementarereignisse aus $A_{1,2}$ seien gleich wahrscheinlich, ebenso die 5 Elementarereignisse in $A_{3,4}$.

Zeige, dass

(a) $X \geq_{sm} Y$, wobei Y die entkoppelte Version von X ist, (4)

aber

(b) $X \notin \mathbf{PA}$. (2)

Aufgabe 3
Zeige, dass die Funktion (aus der Vorlesung) $f(U) = |U|^r$ für ein $r \geq 1$, wobei $U \in \mathcal{U}$, superadditiv ist. (2)

Aufgabe 4
Folgere aus Theorem 2.21 den bekannten zentralen Grenzwertsatz aus den Grundvorlesungen. (2)