Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2013
21.06.2013

Angewandte Stochastik I - Blatt 10

Abgabe: 28. Juni 2013 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei X eine absolutstetige Zufallsvariable mit symmetrischer Dichte f_X, d.h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$f_X(c+x) = f_X(c-x)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. Weiterhin gelte $E|X| < \infty$. Zeige, dass dann $EX = c$ gilt. Nenne ein Beispiel einer absolutstetigen Zufallsvariablen mit symmetrischer Dichte.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Folge von unabhängigen und identisch absolut stetig verteilten Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F_X und Dichtefunktion f_X. Definiere $M := \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Zeige:

(a) M ist eine Zufallsvariable[1].

(b) M ist absolut stetig verteilt mit Dichte $f_M(x) = n \cdot f_X(x) \cdot (F_X(x))^{n-1}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Zufallsvariable mit $P(X \geq 0) = 1$. Zeige, dass dann

$$EX = \int_0^\infty (1 - F_X(y))dy$$

gilt, wobei F_X die Verteilungsfunktion von X bezeichne.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Eine Pumpe sei ununterbrochen in Betrieb, bis sie ausfällt. Die Zufallsvariable X, die die zufällige Dauer der Funktionsfähigkeit der Pumpe beschreibt, sei absolutstetig mit Dichte $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{, falls } x > 0 \\ 0 & \text{, falls } x \leq 0 \end{cases}$$

mit $\lambda > 0$. Weiter sei bekannt, dass Pumpen dieser Bauart im Mittel 100 Stunden laufen, bis sie ausfallen.

(a) Wie ist der Parameter λ zu wählen, damit der Erwartungswert von X gleich der mittleren Laufzeit dieser Pumpen ist?

(b) Aus Sicherheitsgründen tauscht man eine Pumpe, sobald sie 100 Stunden lang im Einsatz war, gegen eine neue gleichartige aus. Bestimme die Verteilung der Zufallsvariablen Y, welche die Einsatzzeit einer Pumpe beschreibt und berechne ihren Erwartungswert[2] (die Einsatzzeit einer Pumpe ist die Zeit, die vergeht, bis die Pumpe entweder ausfällt oder aber ausgewechselt wird).

[1] Es genügt zu zeigen, dass $\{M \leq x\}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Borel-Meßbare Menge ist.
[2] Verwende Aufgabe 3.