Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2013
28.06.2013

Angewandte Stochastik I - Blatt 11

Abgabe: 5. Juli 2013 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Es seien 10 baugleiche Maschinen in einem Unternehmen im Einsatz, deren Lebensdauern $X_1, \ldots, X_{10}$ (in Tagen) unabhängig und exponentialverteilt sind mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Zeige, dass die Zufallsvariable $Y := \min\{X_1, \ldots, X_{10}\}$ wieder exponentialverteilt ist und bestimme den Parameter $\lambda_{\min}$ dieser Verteilung.

(b) Wie lange dauert es im Mittel, bis die erste Maschine ausfällt?

(c) In welchem Bereich darf λ liegen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % alle 10 Maschinen mindestens 30 Tage lang halten?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Bei einem Glücksspiel kann ein Spieler Geld setzen. Es wird eine faire Münze geworfen und bei Kopf bekommt der Spieler den doppelten Einsatz zurück. Das Glücksspiel wird unabhängig wiederholt. Der Spieler fängt mit einem Euro Einsatz an. Wenn er ein Spiel gewinnt, dann hört er auf und nimmt den Gewinn mit. Wenn er verliert, dann verdoppelt er seinen Einsatz und spielt weiter. Dies wiederholt er bis zu einem Gewinn. Sei X der Gewinn nach Abzug aller Einsätze und Y die Summe aller Einsätze, wenn er aufhört zu spielen. Bestimme EX und EY.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $X_1, \ldots, X_n$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $E|X_1^2| < \infty$ und $\sigma^2 := Var(X_1)$.

(a) Sei $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$. Zeige[1], dass $E\left(\bar{X}_n^2\right) = \frac{1}{n}\left(E(X_1^2) + (n-1)(EX_1)^2\right)$.

(b) Definiere $S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X}_n)^2$. Zeige, dass $E(S_n^2) = \sigma^2$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Seien X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariablen.

(a) Gelte $X_1, X_2 \sim N(0,1)$. Zeige[2], dass dann die Dichte f_{X_1/X_2} des Quotienten X_1/X_2 gegeben ist durch

$$f_{X_1/X_2}(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

(b) Gelte $X_1 \sim Poi(\lambda_1)$ und $X_2 \sim Poi(\lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Zeige[3], dass $X_1 + X_2 \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$.

[1] Weder in Teil (a) noch in Teil (b) wird explizit gebraucht, ob es sich um absolut stetige oder diskrete Zufallsvariablen handelt.

[2] Verwende einen Dichtetransformationssatz.

[3] Verwende die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit.