Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2013
05.07.2013

Angewandte Stochastik I - Blatt 12

Abgabe: 12. Juli 2013 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Die negative Binomialverteilung ist definiert über die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(k) = \binom{k+r-1}{k} \eta^r (1-\eta)^k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

wobei $\eta \in [0,1]$ und $r \in \mathbb{N}$ seien. Ist X negativ binomialverteilt, so schreibt man auch: $X \sim NBin(r, \eta)$.

(a) Sei $X \sim NBin(r, \eta)$. Berechne EX[1].

(b) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim Geo(p)$[2], $i = 1, \dots, n$ und $p \in (0,1]$. Zeige[3], dass dann

$$X_1 + \dots + X_n \sim NBin(n, p).$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei X eine standard Cauchy-verteilte Zufallsvariable, d.h. X ist absolut stetig mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechne $E(|X|)$.

(b) Sei $g(x) = e^{-\arctan(x)} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Berechne $E(g(X))$.

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Sei $(X, Y) \sim N(o, K)$ ein multivariat normalverteilter Zufallsvektor mit

$$o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$

für $0 \le \rho < 1$. Zeige:

(a) $X \sim N(0,1)$ und $Y \sim N(0,1)$.

(b) f ist wirklich eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

(c) $Cov(X, Y) = \rho$.

(d) In diesem Fall gilt: X und Y sind unabhängig $\Leftrightarrow$ $Cov(X, Y) = 0$.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Berechne jeweils für die folgenden Zufallsvariablen X den Erwartungswert von $g(X)$ mit der vorgegebenen Funktion g:

(a) $X \sim N(0,1)$, $g(x) = e^x$.

(b) $X \sim U([0,1])$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(c) $X \sim Exp(1)$, $g(x) = \sin(x)$.

(d) $X \sim Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$, $g(x) = g_s(x) = e^{sx}$, $s \in \mathbb{R}$.

---

[1] Verwende folgende Identität:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(n+j)!}{(j-1)!} a^j = \frac{(n+1)!a}{(1-a)^{n+2}},$$

für $0 < a < 1$ und $n \in \mathbb{N}$

[2] Verwende die folgende Definition der geometrischen Verteilung: $P(X = k) = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, \dots$.

[3] Zeige zunächst mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{l+n-1}{l} = \binom{k+n}{k},$$

für jedes feste $n \in \mathbb{N}$.