ulm university universität uulm

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2013
14.06.2013

Angewandte Stochastik I - Blatt 9

Abgabe: 21. Juni 2013 vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein absolutstetiger Zufallsvektor mit der Dichte

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2x_1 + \frac{2}{3}x_2 & , \text{ falls } (x_1, x_2) \in [-0.5, 0.5] \times [3, \sqrt{12}] \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

(a) Zeige, dass f wirklich eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Bestimme die Randdichten von X_1 und X_2.

(c) Überprüfe, ob X_1 und X_2 unabhängig sind[1].

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien X und Y zwei unabhängige auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen und bezeichne $Z = |X - Y|$ den Abstand zwischen X und Y. Bestimme die Verteilungsfunktion, die Dichte und den Erwartungswert[2] von Z.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X, Y \sim N(0, 1)$. Bestimme[3] $P(X < Y < 0)$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Der Inhalt einer bestimmten Sorte Farbdosen sei auf dem Etikett mit 1000g Farbe angegeben. Die Abfüllmaschine kann diese Menge jedoch nicht exakt abfüllen, so dass die tatsächlich abgefüllte Menge (in Gramm) normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = 1000$ und $\sigma^2 = 100$. Die verwendeten Dosen können höchstens 1020g Farbe fassen. Berechne die Wahrscheinlichkeit[4], dass eine Dose beim Abfüllen überläuft.

---

[1] X_1 und X_2 sind unabhängig $\Leftrightarrow$ $f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2), \ \forall \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

[2] Verwende die Hinweise zu Blatt 8.

[3] Die gemeinsame Dichte von $(X, Y)^T$ ist die einer multivariaten Normalverteilung mit $n = 2$,

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um das Integral zu berechnen, verwende Substitution durch Polarkoordinaten.

[4] Verwende zunächst eine geeignete Skalierung und Normierung, um eine standardnormalverteilte Zufallsvariable zu bekommen. Sei ϕ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen, dann ist $\phi(2) \approx 0.977250$.