ulm university universität uulm

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2013

Angewandte Stochastik I - Musterlösung Blatt 12

Aufgabe 1

(b) Beweis des Hinweises:
Beweis durch Induktion nach $k \in \mathbb{N}$: Für $k = 1$ ist

$$\sum_{l=0}^{1} \binom{l+k-1}{l} = \binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} = n+1 = \binom{n+1}{1},$$

d.h. was gezeigt werden sollte.
Induktionsschritt $k \to k+1$:

$$\sum_{l=0}^{k+1} \binom{l+n-1}{l} = \sum_{l=0}^{k} \binom{l+n-1}{l} + \binom{k+1+n-1}{k+1} \overset{I.H.}{=} \binom{k+n}{k} + \binom{k+n}{k+1} = \binom{k+n+1}{k+1}.$$

Damit ist der Hinweis gezeigt.

Aufgabe 4

(a)

$$\begin{aligned} Eg(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^x e^{-\frac{x^2}{2}}}_{e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} e^{\frac{1}{2}}} dx \\ &= e^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} dx \\ &= \sqrt{e} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Eg(X) &= \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= [\arcsin(x)]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
Eg(X) &= \int_0^\infty \sin(x)e^{-x}dx \\
&\overset{P.I.}{=} \underbrace{-\sin(x)e^{-x}\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \cos(x)e^{-x}dx \\
&\overset{P.I.}{=} \underbrace{-\cos(x)e^{-x}\Big|_0^\infty}_{=-1} - \underbrace{\int_0^\infty \sin(x)e^{-x}dx}_{=Eg(X)} \\
\Leftrightarrow 2Eg(X) &= -1 \\
\Leftrightarrow Eg(X) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
Eg(X) &= \sum_{k=0}^\infty e^{sk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^\infty \frac{(e^s\lambda)^k}{k!}}_{=e^{\lambda e^s}} e^{-\lambda} \\
&= e^{\lambda(e^s-1)}
\end{aligned}
$$