ulm university universität uulm

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dipl.-Math. Stefan Roth

SS 2013
10.05.2013

Musterlösung - Blatt 3

Aufgabe 1

$\Omega = \{(x_1, x_2);\ x_1, x_2 \in \{1, \dots, 6\}\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{36},\ A \in \mathcal{F}.$

(a) $A_1 = \{(x_1, x_2);\ x_1 < x_2\}$
$\Rightarrow P(A_1) = \frac{|A_1|}{6^2} = \frac{5+4+3+2+1}{6^2} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

(b) $A_2 = \{(x_1, x_2);\ x_1 \cdot x_2 \text{ gerade}\} \Rightarrow A_2^c = \{(x_1, x_2);\ x_1 \text{ und } x_2 \text{ beide ungerade}\}$
$\Rightarrow P(A_2) = \frac{|A_2|}{36} = 1 - \frac{|A_2^c|}{36} = 1 - \frac{3 \cdot 3}{36} = \frac{3}{4}$

(c) $E_1 = \{(x_1, x_2);\ x_1 > 3\}, \quad E_2 = \{(x_1, x_2);\ x_1 + x_2 = 7\} \Rightarrow P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ und
$E_2 = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$ also $P(E_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
Wegen $E_1 \cap E_2 = \{(4,3), (5,2), (6,1)\}$ gilt $P(E_1 \cap E_2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = P(E_1) \cdot P(E_2)$
$\Rightarrow E_1$ und E_2 sind unabhängig.

(d) $F_1 = \{(x_1, x_2);\ x_1 + x_2 \text{ ist durch 3 teilbar}\}$
$F_2 = \{(x_1, x_2);\ x_1 + x_2 \text{ ist durch 5 teilbar}\}$
$F_3 = \{(x_1, x_2);\ x_1 + x_2 \text{ ist gerade}\}$
$x_1 + x_2 \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Somit gilt

(1) $F_1 = \{(1,2), (2,1), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (3,6), (6,3), (4,5), (5,4), (6,6)\}$
$\Rightarrow P(F_1) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

(2) $F_2 = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (4,6), (6,4), (5,5)\}$
$\Rightarrow P(F_2) = \frac{7}{36}$

(3) $F_3 = \{(1,1), (1,3), (3,1), (2,2), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (2,6), (6,2),$
$(3,5), (5,3), (4,4), (4,6), (6,4), (5,5), (6,6)\}$
$\Rightarrow P(F_3) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

(4) $F_1 \cap F_2 = \emptyset \Rightarrow P(F_1 \cap F_2) = 0$ und $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 0$
$F_1 \cap F_3 = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (6,6)\} \Rightarrow P(F_1 \cap F_3) = \frac{1}{6}$
$F_2 \cap F_3 = \{(4,6), (6,4), (5,5)\} \Rightarrow P(F_2 \cap F_3) = \frac{1}{12}$

Konklusion:

1.) $P(F_1 \cap F_2) = 0 \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{36} = P(F_1)P(F_2) \Rightarrow F_1$ und F_2 sind nicht unabhängig

2.) $P(F_1 \cap F_3) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(F_1)P(F_3) \Rightarrow F_1$ und F_3 sind unabhängig

3.) $P(F_2 \cap F_3) = \frac{1}{12} \neq \frac{7}{36} \cdot \frac{1}{2} = P(F_2)P(F_3) \Rightarrow F_2$ und F_3 sind nicht unabhängig

4.) $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 0 \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{36} \cdot \frac{1}{2} = P(F_1)P(F_2)P(F_3) \Rightarrow F_1$, F_2 und F_3 sind nicht (gemeinsam) unabhängig