Verschiedene stochastische Prozesse

Ann-Kathrin Rüger | 27. Mai 2013 | Institut für Stochastik

Inhalt

Wiener-Prozess (Brownsche Bewegung)

Definition

Ein zeitstetiger Prozess W heißt *Wiener-Prozess* $\Leftrightarrow$

1. $W(0) = 0$
2. W besitzt unabhängige Zuwächse
3. $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$
4. Die Trajektorien sind fast sicher stetig.

Eigenschaften des Wiener-Prozesses

- Die Pfade des Wiener-Prozesses sind fast sicher an keiner Stelle differenzierbar
- $P\left(\sup_{t\geq 0} X_t = \infty\right) = P\left(\inf_{t\geq 0} X_t = -\infty\right) = 1$
- Der Wiener-Prozess ist ein Lévy- und ein Gauß-Prozess

Lévy-Prozesse

Definition

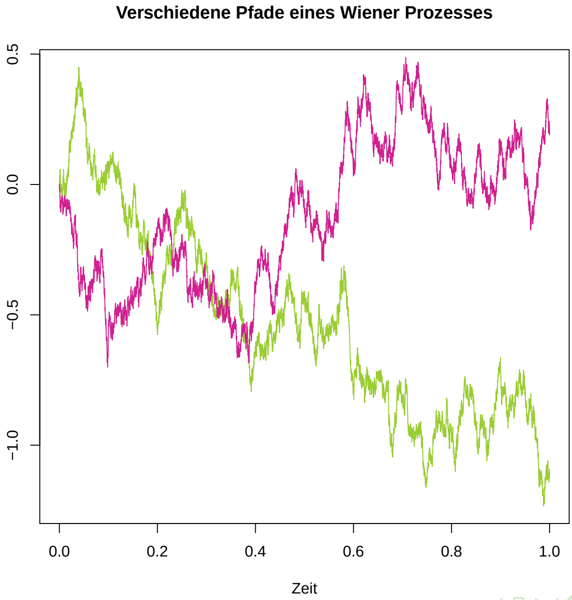
Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ ist ein Lévy-Prozess, falls er stationäre und unabhängige Zuwächse hat.

Gauß-Prozesse

Definition

Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in T}$ ist ein Gauß-Prozess, falls für alle $t_1, ..., t_n \in T, \quad n \in \mathbb{N}$ gilt: $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ ist n-dimensional normalverteilt.

Speziell: Ein Gauß-Prozess heißt *zentriert*, falls der Erwartungswert konstant 0 ist.


Verschiedene Pfade eines Wiener Prozesses
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Zeit

Invarianzeigenschaften des Wiener-Prozesses

Sei $\{W_t, t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Dann gilt

- Symmetrie: $W_t^{(1)} = -W_t$
- Verschiebung des Nullpunktes: $W_t^{(2)} = W_{t+t_0} - W_{t_0}$
- Skaliereung: $W_t^{(3)} = \sqrt{c}W_{\frac{t}{c}}$, für ein $c > 0$
- Spiegelung: $W_t^{(4)} = tW_{\frac{1}{t}}$

$\left\{W_t^{(1)}\right\}_{t\geq 0} - \left\{W_t^{(4)}\right\}_{t\geq 0}$ sind ebenfalls Wiener-Prozesse.

Brownsche Brücke

Definition

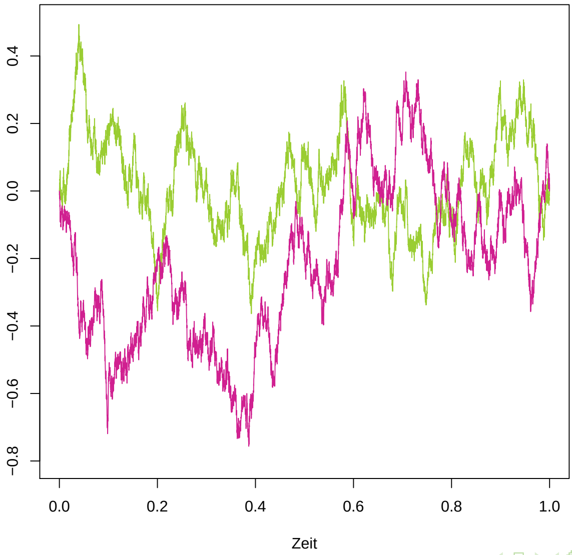
Ein Gauß-Prozess U heißt Brownsche Brücke, falls

1. $\mathbb{E}(U(t)) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$
2. $\mathrm{Cov}(U(s), U(t)) = \min\{s,t\} - st \quad \forall s,t \in [0,1]$

Eigenschaften der Brownschen Brücke

- Es existiert eine Version der Brownschen Brücke mit fast sicher stetigen Pfaden.
- Die Brownsche Brücke ist in keinem Punkt differenzierbar.
- Die Brownsche Brücke ist ein Gauß-Prozess, jedoch kein Lévy-Prozess.
- Anfangs- und Endwert sind gleich.
- $P(U_t \leq c) = P(W_t \leq c | W_T = 0)$

Verschiedene Pfade einer Brownschen Brücke



Uhlenbeck-Prozess

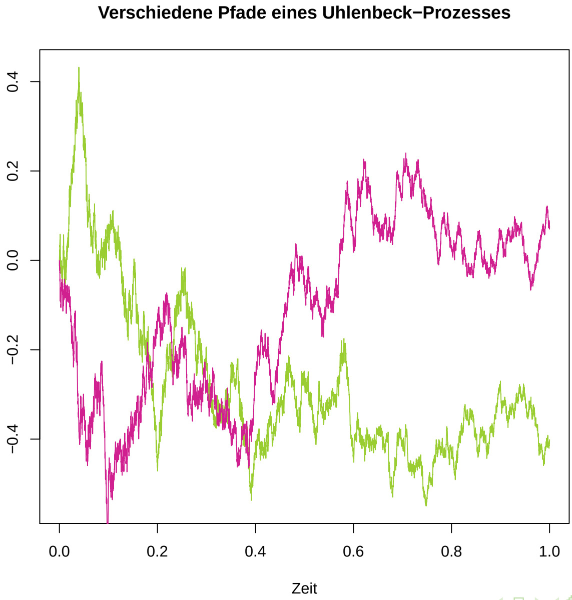
Definition

Ein Gauß-Prozess X heißt Uhlenbeck-Prozess, falls

1. $\mathbb{E}(X(t)) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$
2. $\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = \exp(-|t-s|) \quad \forall s, t \in [0,1]$

Eigenschaften des Uhlenbeck-Prozesses

- $\mathrm{Var}(X(t)) = 1$
- Der Uhlenbeck-Prozess ist ein Gauß-Prozess


Verschiedene Pfade eines Uhlenbeck−Prozesses
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Zeit

Grenzüberschreitende Wahrscheinlichkeiten des Wiener-Prozesses und der Brownschen Brücke

Sei W ein Wiener-Prozess und $T_b = \inf\{t \geq 0 : W_t = b\}$.
Dann gilt:

$$P\left(T_b < t\right) \quad = 2P(N(0,t) > b)$$

Grenzüberschreitende Wahrscheinlichkeiten des Wiener-Prozesses und der Brownschen Brücke

Sei W ein Wiener-Prozess. Dann gilt:

$$P\left(\sup_{0\leq s\leq t} W_s > b\right) = 2P(N(0,t) > b)$$

Grenzüberschreitende Wahrscheinlichkeiten des Wiener-Prozesses und der Brownschen Brücke

Sei U eine Brownsche Brücke. Dann gilt:

$$P(||U|| > b) = P\left(\sup_{0\leq t\leq 1}(1-t)W(t/(1-t)) > b\right)$$

Literatur

I. Karatzas and S. E. Shveve, *Brownian motion and stochastic calculus.*
Springer, 2nd ed., 1991.

G. R. Shorak and J. A. Wellner, *Empirical processes with applications to statistics.*
Wiley, 1986.

Prof. Dr. E. Spodarev, *Stochastik II, Vorlesungsskript.*
Universität Ulm, 2010.

G. Leobacher and F. Pillichshammer, "Einiges über die Brown'sche Bewegung."
http://www.finanz.jku.at/uploads/tx_mypubl/exbb.pdf.

J. Richter, "Statistik, R, Fotografie und Sonstiges."
http://berlani.de/2012/04/r-statistik/r/wiener-prozess/.

Fragen??

Danke für Ihre Aufmerksamkeit