Schwache Konvergenz

Ivan Lecei

Institut für Stochastik

18. Juni 2013

Inhalt

Motivation

- Nach ZGWS konvergiert für $n \to \infty$
  $F_n(x) = P\{\frac{X_1+\ldots+X_n-np}{\sqrt{npq}} \leq x\}$ gegen
  $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$, wenn die X_i unabhängig und bernoulliverteilt sind (Erfolgswahrscheinlichkeit p=1-q)
- Analog: $P_n((-\infty, x]) = F_n(x)$ konvergiert gegen $P((-\infty, x]) = F(x)$, wobei $P(\{x\}) = 0$
- Vorteil: Verteilungskonvergenz an euklidischen Raum gebunden, schwache Konvergenz für allgemeine metrische Räume (M, δ) mit σ -Algebra $\mathcal{M}_\delta^B$ ausdehnbar

Motivation

- Dann konvergiert das Wahrscheinlichkeitsmaß P_n schwach gegen P, wenn für alle Borelmengen $A \in \mathcal{M}_\delta^B$ mit $P(\partial A) = 0$ gilt $P_n(A) \to P(A)$
- Aus der schwachen Konvergenz von X_n gegen X kann die Verteilungskonvergenz bestimmter Funktionale $\psi(X_n) \xrightarrow{D} \psi(X)$ gefolgert werden

Zufälliges Element

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ ein messbarer Raum mit $\Omega, \mathcal{S} \neq \emptyset$.

Zufälliges Element

Ein zufälliges Element $X : \Omega \to \mathcal{S}$ ist eine $\mathcal{A} \mid \mathcal{B}$ -messbare Abbildung, das heißt für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt
$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$

- Die Verteilung von X ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_X auf $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$, so dass für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt
$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$
- jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathcal{S}, \mathcal{B})$ kann als Verteilung eines Zufallselementes X betrachtet werden.

Stochastischer Prozess

- $(\mathcal{S}_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$ eine Famile von messbaren Räumen .

Stochastischer Prozess/Zufällige Funktion

Eine Familie $X = \{X(t), \ t \in T\}$ von Zufallselementen $X(t) : \Omega \to \mathcal{S}_t$, die auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiert und für alle $t \in T \mathcal{A} \mid \mathcal{B}_t$ -messbar sind heißt stochastischer Prozess

- Jede Famile von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{P_{t_1,\dots,t_n}, n \in \mathbb{N}, \ \{t_1, \dots, t_n\} \subset T\}$ auf $(\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \dots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ die symmetrisch und konsistent ist kann als endlich-dimensionale Verteilung für einen stochastischen Prozess, der auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiert ist, betrachtet werden (Kolmogorov)

Natürliche Projektion

Natürliche Projektion

Für beliebige Punkte $t_1, ..., t_k \in [0,1]$ ist die natürliche Projektion von dem Raum D[0,1] der cádlàg-stetigen Funktionen in $\mathbb{R}^k$ definiert über $\pi_{t_1,...,t_k}(x) = (x(t_1), ..., x(t_k))$, $x \in D[0,1]$

- Die endlichdimensionalen Verteilungen von X lassen sich dann über $P\pi_{t_1,...,t_k}^{-1}$ angeben, wobei P das von X induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß ist.
- Wenn T_0 1 enthält und dicht in $[0,1]$ liegt, dann wird P eindeutig über $P\pi_{t_1,...,t_k}^{-1}$, $t_1, ..., t_k \in T_0$ bestimmt

Schwache Konvergenz

- (M, δ) beliebiger metrischer Raum und $\mathcal{M}_\delta^B$ diejenige σ -Algebra, die von den offenen Bällen erzeugt wird. Seien X_n, $n \geq 0$ Zufallselemente bezüglich $(M, \mathcal{M}_\delta^B)$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und sei P_n das von X_n induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß

Schwache Konvergenz

X_n konvergiert schwach gegen X_0, wenn für $n \to \infty$
$\int_M f dP_n = Ef(X_n) \to Ef(X_0) = \int_M f dP_0$
für alle reellen, beschränkten, bezüglich der Metrik δ stetigen und $\mathcal{M}_\delta^B$ -messbaren Funktionen f auf M. Man schreibt $X_n \Rightarrow X_0$ (bzw. $P_n \Rightarrow P_0$) auf $(M, \mathcal{M}_\delta^B, \delta)$.

- $X_n \xrightarrow{D} X_0 \Leftrightarrow X_n \Rightarrow X_0$ für Zufallsvariablen X_n, X_0 .

Straffheit/schwache Kompaktheit

Straffheit

Eine Folge $X_n, n \geq 1$ von (M, δ) -wertigen Zufallselementen ist straff, wenn auch die zugehörigen induzierten Wahrscheinlichkeitsmaße P_n straff sind. Für jedes $\varepsilon > 0$ muss dann eine kompakte Menge $K \subset M$ existieren, sodass für alle $n \geq 1$
$P_n(K) = P(X_n \in K) > 1 - \varepsilon$.

Schwache Kompaktheit

Eine Familie von Verteilungen $\mathcal{P}$ auf $(M, \mathcal{M}_\delta^B)$ nennt man schwach kompakt, wenn jede Folge von Verteilungen von $\mathcal{P}$ eine Teilfolge enhält, die schwach gegen eine Verteilung auf $(M, \mathcal{M}_\delta^B)$ konvergiert (aber nicht notwendigerweise in $\mathcal{P}$ liegt).

Eigenschaften

Portmanteau Theorem

Folgende Aussagen sind äquivalent
1. $P_n \Rightarrow P_0$ auf $(M, \mathcal{M}_\delta^B, \delta)$
2. $\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P_0(G)$ für alle offenen Mengen G
3. $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P_0(F)$ für alle abgeschlossenen F
4. $\lim_{n\to\infty} P_n(B) = P_0(B)$ für all diejenigen Borel-messbaren Mengen B, für welche gilt $P_0(\partial B) = 0$

- Aus $P_n \Rightarrow P$ folgt für $\psi : (M, \mathcal{M}_\delta^B, \delta) \to (M', (\mathcal{M}_\delta^B)', \delta')$, dass $\psi(X_n) \xrightarrow{D} \psi(X)$ (bzw. $P_n\psi^{-1} \Rightarrow P\psi^{-1}$) für alle $\mathcal{M}_\delta^B$-messbaren ψ, wenn zusätzlich $P(X \in D_\psi) = 0$ mit D_ψ Menge der Unstetigkeitspunkte von ψ (Abschwächung des Continous Mapping Theorems)

1. Kriterium

- Sei $mesh(T_m) = \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq k_m\}$ für ein beliebiges Gitter T_m auf [0,1] ($t_{m,0} = 0$, $t_{m,k_m} = 1$)
- Für ein $x \in D$ nennen wir die Funktion $A_m(x) \in D$, die auf allen Intervallen der Form $[t_{m,i-1}, t_{m,i})$ $(0 \leq i \leq k_m)$ konstant $x(t_{m,i})$ entspricht die T_m -Approximation von x

1. Kriterium

Für stochastische Prozesse X_n, $n \geq 0$ auf $(D, \mathcal{D})$ mit $X_n(0) = 0$, für die für $mesh(T_m) \to 0$ $(m \to \infty)$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind
1. $X_n \xrightarrow[f.d.]{} X_0$ für $n \to \infty$ und wobei $P(X_0 \in C) = 1$
2. $\limsup_{n\to\infty} P(\| X_n - A_m(X_n) \|_\infty \geq \varepsilon) \leq d_{\varepsilon,m}$ für alle $\varepsilon > 0$ und $d_{\varepsilon,m} \to 0$ für $m \to \infty$

gilt $X_n \Rightarrow X_0$ auf $(D, \mathcal{D}, \| \cdot \|_\infty)$ für $n \to \infty$

2. Kriterium (Straffheit)

2.Kriterium

Für einen separablen metrischen Raum (M, δ) gelte

• $X_n \underset{f.d.}{\longrightarrow} X_0$ für $n \to \infty$ und zusätzlich

• X_n , $n \geq 1$ ist straff (sowie die induzierten Wahrscheinlichkeitsmaße P_n , $n \geq 1$).

Dann gilt $X_n \Rightarrow X_0$ auf $(M, \mathcal{M}_\delta^B, \delta)$

- Mit f.d. (=finite dimensional distributions) sei hier die schwache Konvergenz der endlichdimensionalen Verteilungen gemeint, d.h. $(X_n(t_1), ..., X_n(t_k))^T \Rightarrow (X_0(t_1), ...X_n(t_k))^T$ $\forall k \in \mathbb{N}, t_1, ...t_k \in [0, 1]$

Beweis 2. Kriterium

- Zum Beweis:
  1. Es gilt $P_n \Rightarrow P$, genau dann wenn jede Teilfolge $\{P_{n'}\}$ eine weitere Teilfolge $\{P_{n''}\}$ enthält, für die gilt $P_{n''} \Rightarrow P$
  2. Prohorovs Theorem: Ist eine Familie $\mathcal{P}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen straff, so ist sie schwach kompakt. Ist sie umgekehrt schwach kompakt, muss zusätlich gelten, dass M separabel und vollständig ist, damit $\mathcal{P}$ straff ist.

Partialsummenprozess

Partialsummenprozess

Seien X_1, X_2,... unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die jeweils Erwartungswert 0 und Varianz 1 haben. Die i-te Partialsumme ist dann für $i \geq 1$ definiert als $S_i = X_1 + ... + X_i$, $S_0 = 0$ und für $t \geq 0$ ist

S(t)=S$_{\lfloor t \rfloor}$ eine zufällige Funktion auf $[0, \infty)$. Der n-te Partialsummen Prozess $\mathbb{S}_n$ auf $(D, \mathcal{D})$ ist dann für $0 \leq t \leq 1$

$$\mathbb{S}_n(t) = \frac{S(nt)}{\sqrt{n}}$$

Für alle t, die $\frac{i}{n} \leq t < \frac{i+1}{n}$ erfüllen ist der Wert von $\mathbb{S}_n$ dann konstant $\frac{S_i}{\sqrt{n}}$

Partialsummenprozess

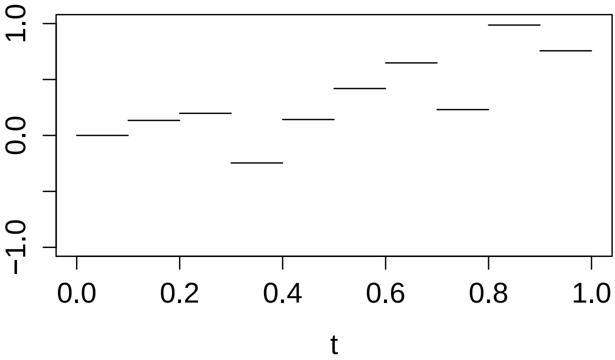

Abbildung : X_i N(0,1)-verteilt,i=1,...,n ; n=10

Konvergenz des Partialsummenprozesses

Donsker

Der Partialsummenprozess $\mathbb{S}_n$ konvergiert schwach gegen einen Wiener Prozess für $n \to \infty$

- Hinreichende Bedingung für die Straffheit: $E\{| X_n(t) - X_n(t_1) |^\gamma | X_n(t_2) - X_n(t) |^\gamma\} \leq [F(t_2) - F(t_1)]^{2\alpha}$ für $t_1 \leq t \leq t_2$ und $n \geq 1$, wobei $\gamma \geq 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$ und F ist eine nichtfallende, stetige Funktion auf [0,1]

Literatur

- Skript Stochastik II (2010)
  Prof. Dr. Evgeny Spodarev
- Convergence of Probability Measures
  P. Billingsley
  Wiley (1968)
- Weak Convergence and Empirical Processes
  Aad W. Van der Vaart, Jon A. Wellner
  Springer (1996)
- Empirical Processes with Applications to Statistics
  G.R. Shorack, Jon A. Wellner
  Wiley (1986)